Université Paris-Dauphine
Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision

THÈSE

pour l'obtention du grade de
DOCTEUR EN INFORMATIQUE

SUR LES ASPECTS COMPUTATIONNELS DU VOTE PAR APPROBATION

Candidat

Nathanaël BARROT

Jury

Jérôme LANG
Directeur de recherche CNRS à l'Université Paris-Dauphine (Directeur de thèse)

Bernard RIES
Maître de conférences à l'Université de Fribourg (Co-encadrant)

Nicolas MAUDET
Professeur HDR à l'Université Pierre et Marie Curie (Rapporteur)

Vincent MERLIN
Directeur de recherche CNRS à l'Université de Caen (Rapporteur)

Bruno ESCOFFIER
Professeur HDR à l'Université Pierre et Marie Curie (Examinateur)

Annick LARUELLE
Professeur HDR à l'Université du Pays basque (Examinatrice)

Remzi SANVER
Directeur de recherche CNRS à l'Université Paris-Dauphine (Examinateur)

Date de soutenance : le 31 Mars 2016

Remerciements

Mes directeurs de thèse sont les premières personnes que j'aimerais remercier. Jérôme et Bernard m'ont permis de comprendre la diversité du travail de recherche et d'observer la passion qui peut en découler ainsi que la rigueur nécessaire à sa bonne exécution. J'en suis aujourd'hui convaincu, je n'aurai pas pu faire de meilleur choix que lorsque j'ai choisi le sujet de thèse de Jérôme.

Bien sûr, les doctorants du Lamsade ont constitué la base de cette aventure. Ceux avec qui j'ai commencé ma thèse, Amine, Nicolas, Rafaël et Tom, sont les personnes qui m'ont le plus apporté pendant ces trois ans et demie, chacun à leur manière. Je remercie les anciens doctorants, Florian, Renaud, Dalal, Édouard, Raja, Lyes, Amine, Lydia, Liangliang, entre autres, pour leur chaleureux accueil au début de ma thèse, mais aussi l'ensemble des doctorants plus récement arrivés, qui ont réussi à instaurer une ambiance franchement amicale (et studieuse) dans les trois bureaux. Je pense à Marek, Satya, Sami, Giulia, Irene, Youcef, Linda ; à Justin, Ian, Myriam, Fabien, Annaëlle, Thomas ; à Khalil, Ioannis, Maude, Pedro, Saeed, Hiba, Diana, et j'en oublie.

Je remercie les membres permanents du Lamsade dans leur intégralité, mais en particulier ceux qui m'ont donné envie de découvrir le monde de la recherche académique, Jérôme bien sûr, mais aussi dans l'ordre chronologique Bruno, Cécile, Meltem, Denis, Vangelis, Bernard et Jérôme ; et ceux qui ont contribué au bon déroulement de ma thèse, Olivier, Éléni, Katerina, Mireille, Nathalie, Hawa et Juliette.

Quelques prénoms ressortent lorsque je pense aux bons moments de ces dernières années ; dans le désordre, Gérard, Cédric, Tony, Clément, Isabelle, Paul, Sébastien, Florentino, Baptiste, Jerry, James, Arthur et tous ceux dont le prénom n'apparaît pas. Je pense aussi aux membres de Do the dance, Tran et Bisous, Anouk, Marion, Sami et bien sûr Matthieu, qui m'ont permis de renouer avec la scène.

Finalement, je pense à mes soeurs Justine, Julia, Mélissa et Cannelle, à mes frères Julien et Nelson et ainsi qu'à ma mère qui m'ont écouté attentivement chaque fois que je leur ai parlé d'élections ou de sac-à-dos, de même pour Éric et Rémy. Je les remercie tous pour leur intérêt et leur patience.

Table des matières

Chapitre 1
Introduction

Au cours des dernières décennies, le développement rapide de l'informatique a provoqué de nombreux changements dans nos sociétés. Les progrès de l'informatique ont permis d'élargir son champ d'application, ce qui a débouché sur la création de nombreux domaines interdisciplinaires. En particulier, le domaine se situant à la frontière entre l'économie et l'informatique a connu un intérêt grandissant, en partie dû à la croissance des échanges électroniques. L'économie et l'informatique se rencontrent en de nombreux points, celui qui nous intéresse dans le cadre de cette thèse est le point de rencontre entre l'*informatique* et la *théorie du vote*. Commençons par introduire la théorie du vote, et plus généralement la *théorie du choix social*, pour pouvoir ensuite présenter les enjeux computationnels qu'il en ressort.

La plupart d'entre nous ont déjà participé à une *élection*. Dès l'école primaire, nous votons pour élire des délégués de classe. Puis, alors que nous sommes plus âgés, la sphère politique nous offre de multiples occasions de voter. Mais le vote est aussi utilisé plus quotidiennement, par exemple, lors de télé-crochets, de concours sportifs (patinage artistique, skateboard) ou encore pour déterminer les meilleurs films (IMDB). Les situations dans lesquelles le vote sert à agréger un ensemble d'opinions individuelles en une *décision collective* sont variées. Ces situations diffèrent sur trois points essentiels.

Tout d'abord, l'*enjeu* des situations de vote peut être important, faible, voir inexistant. J'appellerai élection politique, toute élection ayant pour finalité de choisir un représentant de l'ensemble des votants, c'est-à-dire un individu ou un groupe qui a le pouvoir de parler ou de prendre des décisions au nom de l'ensemble des votants. Les élections politiques nationales sont celles avec l'enjeu le plus élevé, comme les présidentielles, les législatives ou encore les régionales. Il existe aussi des élections politiques à faible enjeu, ou à enjeu très local, comme l'élection d'un comité d'entreprise ou d'un conseil de laboratoire. Enfin, les élections profanes, c'est-à-dire non politiques, sont généralement des élections avec peu d'enjeu. Il peut s'agir de choisir une date de réunion (plus généralement, tout sondage de type Doodle), prendre une décision lors d'une assemblée de co-propriétaires, attribuer une note lors d'un concours sportif (patinage artistique, skateboard, surf), sélectionner des candidats à l'aide d'un comité de sélection ou encore choisir un ensemble d'objets finis ou d'activités pour un groupe d'agents (villes à visiter lors d'un voyage, livres à emporter en vacances). L'enjeu d'une élection possède une influence importante sur l'implication des acteurs et donc sur leur capacité à fournir des efforts cognitifs ou d'organisation.

Ensuite, la variété de l'*espace des votants* est un critère essentiel. Il existe des situations avec un (très) grand nombre de votants comme les élections politiques nationales, ou les émissions de télé-crochets comme l'Eurovision. Ces situations requièrent une organisation importante et donc des moyens adaptés. À l'opposé, le nombre de votants peut être faible, par exemple lors d'une assemblée de co-propriétaires, lors de la tenue d'un comité de sélection, ou encore dans le cas de la recommandation de groupe. Dans ces situations, les conditions de vote peuvent être variées mais ne possèdent généralement pas d'enjeu significatif. De plus, les méthodes de vote sont, dans de nombreux cas, anonymes, c'est-à-dire que l'identité des votants ne rentre pas en considération.

Enfin, l'*espace des candidats* peut aussi être très varié. D'une part, certaines situations font intervenir un très grand nombre d'alternatives [1] comme le vote sur des domaines combinatoires. Dans le vote sur des domaines combinatoires [2], l'ensemble des alternatives est formé par le produit cartésien de variables, possédant chacune plusieurs valeurs possibles. Un exemple typique de vote sur des domaines combinatoires est le choix d'un menu commun, où il peut exister une variable pour l'entrée, une pour le plat et une pour la boisson. D'autre part, le nombre de candidats peut être relativement faible, comme dans les référendums et dans certaines élections politiques (comme l'élection présidentielle).

Ces différents exemples illustrent le fait que le vote est une méthode très répandue pour agréger des opinions individuelles en un choix collectif. Et puisque ces exemples sont très variés, les procédures utilisées pour décider de l'issue du vote le sont tout autant. Le choix de la méthode à utiliser dépend essentiellement du contexte de décision, du nombre de votants et du nombre de candidats. Par exemple, en France, le président est élu au scrutin uninominal majoritaire à deux tours, ce qui est adapté dans un contexte à fort enjeu, avec un nombre de votants très élevé et peu de candidats. En effet, la simplicité de ce mode de scrutin facilite sa mise en place à très grande échelle, tout en permettant aux votants de s'exprimer de façon significative lorsque le nombre de candidats est faible.

Illustrons la variété des méthodes de vote et de leurs résultats avec un exemple simple de décision collective. Une communauté doit choisir une nouvelle installation sportive à l'usage de ses membres parmi trois propositions : une piscine (P), un terrain de tennis (T) et un mini-golf (G). Bien sûr, les membres de la communauté, au nombre de cent, possèdent des préférences individuelles vis-à-vis de ces installations. Le tableau suivant résume ces préférences :

Dans cet exemple, 45 votants préfèrent le terrain de tennis (T) à la piscine (P), et la piscine (P) au mini-golf (G), et ainsi de suite. Comment la communauté doit-elle choisir

1. Dans cette thèse, le terme "alternative" est à prendre au sens anglais, c'est-à-dire une possibilité parmi un ensemble fini de choix.
2. Le vote sur des domaines combinatoires est présenté plus en détail en section 2.7.

45	34	21
T	G	P
P	P	G
G	T	T

une installation en se basant sur ces préférences ? Autrement dit, quelle est la méthode de vote adaptée au contexte de décision, au nombre de votants et de candidats ? D'un point de vue théorique, cette élection est similaire à une élection politique dans laquelle un groupe d'agents vote pour élire un représentant parmi un ensemble de candidats. Ainsi, tentons d'appliquer les procédures de vote utilisées habituellement dans ce cas. Dans de nombreuses élections politiques, la règle utilisée est la règle de *pluralité* qui élit le candidat qui est rangé en premier par le plus grand nombre de votants. Dans notre exemple, on choisirait alors de construire un terrain de tennis (T). En France, l'élection présidentielle se déroule en deux temps. Au premier tour, seuls les deux candidats rangés le plus de fois en première position sont admis pour un face-à-face au second tour. Cela résulterait en l'élimination de la piscine au premier tour, puis par une victoire du mini-golf (G) sur le terrain de tennis au second tour puisque 55 membres préfèrent le golf au tennis. Une autre méthode usuelle qui peut être utilisée ici est la *méthode de Condorcet*. Il s'agit de choisir l'alternative qui gagne à chaque fois lors d'une comparaison par paire avec une autre alternative. On remarque que dans notre exemple, l'alternative piscine est toujours gagnante lors d'une comparaison en face-à-face. En effet, 55 membres préfèrent la piscine au terrain de tennis et 79 la préfèrent au mini-golf. En appliquant cette dernière méthode, l'installation choisie est donc la piscine (P).

Ces trois règles, qui paraissent raisonnables dans ce contexte, conduisent à trois résultats différents. Cet exemple illustre la nécessité de l'étude des méthodes de vote, et plus globalement, l'étude des mécanismes de décision collective. La théorie du choix social, qui englobe la théorie du vote, se propose d'étudier ces mécanismes de décision collective. L'étude de ces mécanismes remonte à l'antiquité et je présenterai dans le chapitre suivant une brève histoire de son évolution.

1.1 Brève histoire du choix social

On peut distinguer trois périodes dans l'histoire du choix social, détaillées dans l'introduction de Brandt et al. (2015).

Durant la première période, qui s'étend de l'antiquité au milieu du XX^{e} siècle, les travaux se sont concentrés sur la conception de règles spécifiques et l'étude de leurs défauts à travers des exemples précis. Pline le Jeune, sénateur romain du I^{er} siècle, ou Ramon Llull, philosophe catalan du $XIII^{\text{e}}$ siècle, sont parmi les pionniers de l'étude des procédures de vote. Mais intéressons-nous au $XVIII^{\text{e}}$ siècle qui a connu les deux plus importantes contributions au choix social de cette première période, dues à un ingénieur, Jean-Charles de Borda, chevalier de Borda (1733–1799), et un philosophe, Marie Jean Antoine Nicolas de

Caritat, marquis de Condorcet (1743–1794). Jean-Charles de Borda proposa en 1770 une méthode de vote, connue aujourd'hui sous le nom de *règle de Borda*, dans laquelle chaque votant fournit un classement complet des candidats. Chaque candidat reçoit alors un point pour tout candidat moins bien classé que lui. Finalement, le candidat avec le plus grand nombre de points est élu. Cependant, le marquis de Condorcet trouva un défaut majeur à cette règle, illustré par l'exemple suivant mettant en scène trois candidats et onze votants :

4	3	2	2
Lionel	Nicolas	Nicolas	Jean-Marie
Nicolas	Jean-Marie	Lionel	Lionel
Jean-Marie	Lionel	Jean-Marie	Nicolas

Dans cet exemple, quatre votants préfèrent Lionel à Nicolas, qu'ils préfèrent à Jean-Marie, et ainsi de suite. Le vainqueur de l'élection selon la méthode de Borda est Nicolas (avec $4 \cdot 1{+}3 \cdot 2{+}2{\cdot}\ 2{+}2{\cdot}\ 0 = 14$ points). Cependant une majorité de votants préfère Lionel à Nicolas (6 sur 11), et préfère Lionel à Jean-Marie (6 sur 11). La méthode de Borda n'élit pas Lionel alors que ce dernier est préféré à tout autre candidat par une majorité de votants. La communauté du choix social appelle le candidat Lionel un *vainqueur de Condorcet*, c'est-à-dire un candidat qui gagne contre chacun des autres candidats en comparaison par à paire.
Supposons maintenant que deux votants supplémentaires se joignent à l'élection, ces deux votants préférant Jean-Marie à Lionel, et Lionel à Nicolas. Il existe toujours une majorité de votants qui préfèrent Lionel à Nicolas et une majorité de votants qui préfèrent Nicolas à Jean-Marie, mais nous observons aussi une majorité de votants préférant Jean-Marie à Lionel. Cette nouvelle situation illustre le fait que la relation de préférence peut être cyclique, ce qui est appelé le *paradoxe de Condorcet*. Cela montre que la proposition du marquis de Condorcet, d'utiliser les résultats des comparaisons par paires, ne conduit pas toujours à une solution claire.
Mentionnons enfin le mathématicien et auteur britannique Charles Dodgson (1832-1898) qui proposa une règle basée sur les comparaisons par paires échappant à ce paradoxe. Lorsqu'il existe un vainqueur de Condorcet, il proposa de l'élire, et dans les autres cas, il proposa de compter le nombre nécessaire de modifications élémentaires à effectuer dans les préférences des votants pour qu'un candidat précis devienne vainqueur de Condorcet, et d'élire le candidat pour qui ce nombre est minimal. Une modification élémentaire est ici un échange entre deux candidats adjacents dans un vote.
Cette première période est passée finement en revue par McLean et Urken (1995).

La deuxième période du choix social débuta au milieu du XX^{e} siècle, avec les travaux de *Kenneth Arrow* qui montra en 1951 que le problème de la règle majoritaire illustré par le paradoxe de Condorcet est en réalité un problème plus général. En effet, Arrow (1951) montra qu'il n'existe pas de règle d'agrégation des préférences qui respecte un petit nombre

de propriétés intuitives et désirables en démocratie, à savoir l'universalité [3], l'unanimité [4] et l'indifférence aux alternatives non-pertinentes [5]. Au lieu de proposer une nouvelle règle ou de mettre en évidence les problèmes d'une règle existante, Arrow proposa un modèle formel pour discuter et analyser l'ensemble des règles possibles. Il énonça ces propriétés en termes mathématiques précis, appelés axiomes, et en explora les conséquences logiques. Avec la même approche axiomatique, Nash Jr (1950) publia un résultat fondateur sur le problème de la négociation, pertinent pour la théorie du partage équitable, et Shapley (1952) publia son papier révolutionnaire sur le concept de solution pour les jeux coopératifs qui porte aujourd'hui son nom, jouant un rôle important dans la formation de coalitions.
Le théorème d'Arrow (1951) est généralement interprété comme un résultat d'*impossibilité* : il est impossible de trouver une règle d'agrégation des préférences qui vérifie simultanément l'universalité, l'unanimité et l'indifférence aux alternatives non-pertinentes, tout en étant non-dictatoriale [6]. Les travaux qui suivirent ce théorème consistèrent principalement en des tentatives pour échapper à cette impossibilité en affaiblissant les hypothèses considérées. Ainsi, ce résultat est considéré comme le point de départ de la théorie du choix social moderne.

La plupart des travaux de cette deuxième période consistent donc en des résultats axiomatiques ou normatifs, comme la caractérisation de règles précises ou de familles de règles de vote. Cependant aucun de ces travaux n'a étudié les *efforts computationnels* nécessaires au calcul du vainqueur des règles ainsi caractérisées, efforts computationnels pouvant être prohibitifs dans certains cas. Dans cette troisième période, une règle ne s'évalue plus seulement sur des aspects normatifs mais aussi sur la possibilité de l'implémenter en un temps raisonnable [7]. Dans la fin des années 80, le domaine du choix social a été investi par les informaticiens dans le but d'utiliser des concepts computationnels et des techniques algorithmiques pour résoudre des problèmes de décisions collectives complexes. Déterminer la *complexité de calcul* d'une règle ou la *complexité de manipulation* sont des exemples typiques d'importation de concepts provenant de l'informatique théorique à la théorie du choix social.
La règle de *Kemeny* est la première règle d'agrégation dont on a montré la difficulté de calcul. Elle a été définie par Kemeny (1959) puis axiomatisée par Young et Levenglick (1978), avant d'être démontrée difficile à calculer par Bartholdi III et al. (1989b), et indépendamment par Hudry (1989). Cependant la complexité précise du calcul d'un vainqueur pour cette règle n'a été démontrée qu'en 2005, pendant une période d'expansion rapide du choix social computationnel. Il en a suivit des algorithmes pour l'implémenter de manière efficace, des approximations rapides et plusieurs études de complexité paramétrée.

3. L'universalité exige que la règle d'agrégation détermine un vainqueur pour n'importe quel ensemble de préférences.

4. L'unanimité exige que si l'ensemble des votants préfère une alternative à une autre, alors la décision collective doit refléter cette préférence.

5. L'indifférence aux alternatives non-pertinentes exige que le classement relatif de deux alternatives ne dépende que de leur position relative pour les individus et non de la position d'autres alternatives.

6. Une règle est dite dictatoriale s'il existe un votant dont les préférences correspondent systématiquement aux préférences collectives.

7. Une règle de vote dont le calcul du vainqueur nécessite des années est inutilisable en pratique.

Le début des années 2000 marque un tournant dans cette période puisqu'en 2006 a été organisée la première édition du séminaire COMSOC, le workshop international de Choix Social Computationnel, à Amsterdam. C'est à cette occasion que le terme Choix Social Computationnel a été utilisé explicitement pour désigner un domaine de recherche spécifique.

De nos jours, le choix social computationnel est un domaine de recherche en expansion qui utilise des techniques diverses pour traiter des questions très variées. Il existe de plus en plus d'interactions avec les acteurs du choix social classique provenant d'économie, des mathématiques et des sciences politiques.

1.2 Vue d'ensemble du choix social computationnel

Comme on l'a mentionné plus haut, le choix social est défini par une approche multidisciplinaire des procédures de décision collective. Cependant, les contributions de l'informatique à la théorie du choix social ne se limitent pas à la conception et l'analyse d'algorithmes pour répondre aux problèmes classiques du choix social. L'informatique (en particulier l'informatique théorique, l'intelligence artificielle et la recherche opérationnelle) a également apporté de nouvelles perspectives qui ont conduit les chercheurs à revisiter les anciennes questions du choix social.
Aujourd'hui, le choix social computationnel suit deux voies principales. La première est l'utilisation des techniques et des pratiques de l'informatique pour mieux analyser les mécanismes du choix social et en concevoir de nouveaux. Les premiers travaux dans ce sens sont une série de papiers par Bartholdi III et al. (1989b) et par Hudry (1989), qui ont montré que, d'une part, la complexité algorithmique d'une règle de vote peut servir de barrière contre la manipulation stratégique d'une élection, mais que, d'autre part, elle peut aussi limiter son utilisation pratique. Certains domaines de l'intelligence artificielle comme l'apprentissage, le raisonnement dans l'incertain ou la représentation des connaissances, ont été appliqués au choix social dans le même but.
La seconde voie est l'application de la théorie du choix social dans le contexte informatique. Par exemple, la théorie du choix social peut fournir des outils pour prendre des décisions collectives dans les systèmes multi-agents, qui sont composés d'agents hétérogènes et individualistes. On peut aussi trouver des applications du choix social dans la recommandation de groupe, la recherche d'information et dans la production participative ("crowdsourcing"). De plus, tandis qu'il est difficile de changer un mécanisme de vote dans le monde politique, les informaticiens peuvent facilement changer de mécanisme dans ces systèmes où l'enjeu est faible, ce qui fournit un environnement de test idéal pour les idées provenant du choix social.

Les principaux sujets du choix social computationnel sont les suivants (Chevaleyre et al. (2007)) :

Théorie du vote computationnel Le vote computationnel constitue le domaine dans lequel s'inscrit cette thèse et sera présenté dans la section suivante.

Partage équitable et allocation de ressources Ce sujet se concentre sur l'allocation d'un ensemble limité de ressources à un ensemble d'agents, étant données leurs préférences sur ces ressources. Dans ce contexte, il est essentiel de faire la distinction entre les ressources *divisibles* et les ressources *indivisibles*. Le premier type de ressources désigne les ressources que l'on peut diviser en parts arbitrairement faibles (de l'argent, de l'eau), tandis que le second désigne les ressources que l'on ne peut pas partager (un meuble, un tableau). Présentons un exemple. Dans le domaine des réseaux de télécommunications, et en particulier dans les réseaux informatiques, le partage de ressources est essentiel. Dans les réseaux informatiques, il s'agit d'allouer une ressource divisible critique, la bande passante, aux utilisateurs, les applications, en fonction de leurs besoins. Dans ce type de réseau, on souhaite utiliser de façon efficace les capacités du réseau, tout en distribuant la bande passante de manière équitable aux applications, qui peuvent être très hétérogènes. Il existe de nombreux critères pour juger de la valeur d'une allocation de ressource comme l'efficacité, la stabilité, ou encore l'équité. Le critère d'efficacité le plus étudié est l'efficacité au sens de *Pareto* : une allocation est efficace au sens de Pareto s'il n'existe pas une autre allocation qui soit strictement meilleure pour au moins un agent sans être moins bonne pour les autres. La stabilité et l'équité peuvent être atteintes, par exemple, par l'*absence d'envie*, qui correspond à la situation où aucun agent ne préfère posséder le lot obtenu par un autre agent plutôt que le sien. On pourra trouver une vue d'ensemble des problèmes liés au partage équitable et à l'allocation de ressource dans Chevaleyre et al. (2006).

Jeux coopératifs Dans de nombreux contextes, les agents coopèrent pour effectuer plus efficacement une tâche. Prenons en exemple un ensemble de quinze agents, dont sept d'entre eux possèdent une chaussure gauche et les huit autres possèdent une chaussure droite. Les chaussures, gauches ou droites, ne valent rien si elles ne sont pas appariées. Les agents doivent nécessairement coopérer pour vendre leurs chaussures. Comment les agents vont-ils coopérer et partager les gains ? Quatres objectifs permettent de guider la répartition des gains : la faisabilité, l'efficacité, la stabilité et l'équité. On trouvera plus d'informations sur ces critères dans Moulin (2002). Puisque les agents sont considérés comme des individus "égoïstes", la notion la plus importante est celle de la *stabilité* d'une coalition : un agent ne doit pas avoir envie de quitter sa coalition. Ces questions et les problèmes algorithmiques qu'elles soulèvent sont présentés dans Osborne et Rubinstein (1994) et Sandholm et al. (1999).

Formation de coalitions On s'intéresse ici aux situations où les agents peuvent former des coalitions et possèdent des préférences sur ces coalitions. Cela inclut le problème d'*affectation*, les jeux *hédoniques* et les jeux par *vote pondéré*. Le problème d'affectation étudie la façon dont deux ensembles d'agents ou d'objets peuvent être appariés en tenant compte des préférences des agents. L'affectation de médecins internes à des hôpitaux est un exemple typique où les deux types d'agents possèdent des préférences sur les coalitions. Assigner un ensemble d'étudiants à un ensemble de logements dans un campus est un exemple où seulement l'un des ensembles d'agents possède des préférences. Une présentation détaillée du problème d'affectation peut être trouvée dans Klaus et al. (2014). Tandis que le problème d'affectation n'autorise que des coalitions de taille deux, les jeux hédoniques autorisent toute structure de coalitions admissible, c'est-à-dire, toute partition de l'ensemble des agents en sous-ensembles. Dans ce contexte, une hypothèse essentielle est que les préférences d'un agent sur les structures de coalitions ne dépendent que des coalitions dans lesquelles il se trouve et pas de la manière dont sont répartis les autres agents. Aziz et Savani (2016) présentent en détail les jeux hédoniques. Enfin les jeux par vote pondéré correspondent aux situations où des votants, qui possèdent des poids variables, acceptent ou rejettent une proposition. Une coalition de votants est alors gagnante si la somme des poids des votants de la coalition atteint un quota prédéfini. Ce thème est présenté en détail dans Chalkiadakis et Wooldridge (2016).

Agrégation de jugements et de croyances L'agrégation de jugements étudie l'agrégation d'un ensemble de jugements individuels sur des propositions interconnectées en un jugement collectif. L'exemple référence de l'agrégation de jugements est celui d'un tribunal. Un jury doit décider de l'issue d'un procès et chaque juré doit s'exprimer sur trois aspects de ce procès : l'action pour laquelle l'accusé est jugé est-elle interdite par la loi, l'accusé a-t-il commis cette action, et enfin est-il coupable ou non ? La question que l'on se pose est alors de savoir comment agréger ces différents jugements en un jugement collectif et cohérent. L'agrégation de croyances est un problème similaire, qui s'intéresse au moyen de fusionner les croyances d'un ensemble d'agents en une croyance collective. Un exemple d'agrégation de croyances est l'agrégation d'informations provenant de différents capteurs dans un système autonome, comme une voiture autonome. Ces voitures autonomes sont équipées de différents capteurs (caméra oculaire, caméra thermique, radar sonore et autres). Pour savoir si la route est dégagée, une telle voiture doit récupérer l'ensemble des informations disponibles et les agréger pour décider si l'information "la route est dégagée" est crédible ou non. Une introduction à l'agrégation de jugements peut être trouvée dans Grossi et Pigozzi (2012) et Endriss (2016).

1.3 Théorie du vote computationnel

La théorie du vote computationnel étudie les aspects algorithmiques de la théorie du vote. La situation considérée est généralement la suivante. Un ensemble de votants doit faire un choix parmi un ensemble d'alternatives. Les alternatives peuvent être, entre autres, des candidats d'une élection politique ou des actions communes à mener. Il existe plusieurs hypothèses sur la forme des préférences des votants, présentées en section 2.1. Généralement, elles sont exprimées par un *ordre linéaire* (un classement) sur les alternatives. On peut aussi faire l'hypothèse que les préférences sont *cardinales*, c'est-à-dire que les votants attribuent un nombre à chaque alternative, représentant l'utilité qu'ils lui associent. Enfin, les préférences peuvent être *dichotomiques*, ce qui signifie que chaque votant sépare les alternatives en deux types, les alternatives approuvées et les alternatives rejetées.

L'issue du vote, c'est-à-dire le choix commun, est déterminée par une *règle de vote* qui, étant donné un ensemble de préférences, peut retourner soit une alternative [8] soit un sous-ensemble d'alternatives [9]. L'exemple le plus répandu de règle de vote est la règle de pluralité, utilisée dans de nombreuses élections politiques, dans laquelle chaque votant attribue un point à son candidat préféré. Le candidat élu est celui qui reçoit le plus de points. Les principales règles de vote connues sont présentées en détail dans le chapitre 2.

Le *vote par approbation* est le thème principal de cette thèse. Contrairement aux règles de vote évoquées jusqu'à présent, le vote par approbation ne nécessite pas de préférences ordinales. Dans ce système, chaque votant est libre de voter pour ("d'approuver") le nombre de candidats qu'il souhaite. Un vote est donc un sous-ensemble de candidats approuvés. Un exemple de fonction dans le cadre du vote par approbation est l'élection par approbation simple, dans laquelle un votant attribue un point à chaque candidat qu'il approuve. De même, le candidat élu est celui qui obtient le plus de points.

Enfin, jusqu'à présent, nous avons considéré des situations où un seul votant doit être élu. Cependant, il existe des situations où il est nécessaire d'élire plusieurs candidats, comme lors de l'élection d'un comité représentatif dans une université. On parle alors de règles de vote à *vainqueurs multiples*. Ces règles ont pour objectif de choisir le sous-ensemble de candidats, de taille fixée ou non, qui reflète au mieux les préférences des votants. Le résultat d'une élection à vainqueurs multiples est un sous-ensemble non-vide de candidats.

Nous allons maintenant présenter les sujets principaux de ce domaine.

Détermination du vainqueur Les théoriciens classiques du vote ne se sont pas intéressés aux problèmes algorithmiques de la détermination d'un vainqueur. Il est vrai qu'une grande partie des règles de vote usuelles se calculent en temps polynomial. C'est seulement lorsque la règle de Kemeny a été démontrée difficile à calculer par Bartholdi III et al. (1989b) et par Hudry (1989) que ce problème est devenu critique. En effet, personne ne peut accepter une règle de vote qui nécessite des années de calcul pour déterminer le vainqueur. Depuis, de nombreuses règles de vote ont été montrées difficiles à calculer, comme la règle proposée par Charles Dodgson au courant du XIX^{e} ou encore la règle de Slater, proche de celle de Kemeny. Dans le cadre des élections à vainqueurs multiples, deux exemples de règles difficiles à calculer sont les règles de Monroe (1995) et de Chamberlin et Courant (1983). Ces deux règles ont été montrées difficiles par Procaccia et al. (2008b).
Pour échapper à ce problème, les chercheurs se sont penchés sur l'approximation de ces règles, c'est-à-dire le calcul d'une solution proche de la solution optimale en un temps raisonnable. On peut citer par exemple la règle de Dodgson comme résultat positif d'approximation, et la règle de Young comme résultat négatif, démontrée inapproximable, deux résultats par Procaccia et al. (2007). Enfin, les chercheurs ont entrepris l'étude de la complexité paramétrée des règles difficiles, afin d'identifier le (ou les) paramètre à l'origine de cette complexité.

8. On parle alors de fonction de choix social ou encore règle de vote résolue.
9. On parle de correspondance de choix social ou règle de vote irrésolue.

Manipulation La manipulation est un sujet prolifique de la théorie du vote, présenté en détail dans Conitzer et Walsh. Rappelons qu'une règle de vote se base uniquement sur les préférences fournies par les votants pour calculer le vainqueur. Il existe de nombreuses situations dans lesquelles un votant peut influencer le résultat d'une élection en sa faveur en ne reportant pas ses *préférences sincères*. Une règle de vote pour laquelle les votants ne peuvent pas manipuler avec succès est dite résistante à la manipulation.

Le résultat fondateur de Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975) montre essentiellement que la manipulation est presque inévitable. Ce résultat établit que toute règle de vote fondée sur des préférences ordinales, surjective [10] et non dictatoriale, n'est pas résistante à la manipulation. On remarquera que les règles de vote fondées sur des préférences dichotomiques, comme le vote par approbation, échappent à ce théorème. Depuis les années 1970, de nombreux travaux ont cherché à contourner le théorème de Gibbard-Satterthwaite.

Plus récemment, des chercheurs ont étudié la complexité de manipulation dans le cadre des élections à vainqueurs multiples. Dans ce contexte, il est souvent fait l'hypothèse que le manipulateur possède une fonction d'utilité ; la question est alors de savoir s'il peut voter de telle manière que son utilité totale soit supérieure à un seuil donné. Par exemple, la complexité de la manipulation du vote unique non-transférable, du scrutin majoritaire plurinominal, de l'approbation simple et du vote cumulatif [11] ont été identifiées par Meir et al. (2008b).

Vote avec préférences incomplètes et élicitation des préférences Dans la plupart des systèmes de vote, les votants doivent fournir un classement complet des alternatives. Cette hypothèse est justifiée et raisonnable dans certains domaines. Cependant dans de nombreuses situations comme la recherche de pages web, la recommandation de produit ou la planification de réunion, cette hypothèse n'est pas réalisable en pratique pour plusieurs raisons. Par exemple, le nombre d'alternatives à considérer peut être élevé et même posséder une structure combinatoire. Une structure combinatoire conduit généralement à un très grand nombre d'alternatives dont la comparaison peut constituer un effort cognitif prohibitif pour les votants. De plus, cela implique une grande quantité de communication pour collecter l'ensemble des votes. Or cet effort peut être superflu dans des situations où une connaissance partielle des préférences peut permettre de conclure quant à l'issue du vote. Enfin, l'ensemble des alternatives à considérer peut être incertain ou évoluer de façon dynamique. Ces situations poussent à l'étude précise de la quantité d'information et de communication nécessaire à la détermination du vainqueur dans les systèmes de vote. Les problèmes algorithmiques soulevés par ces situations sont identifiés par Boutilier et Rosenschein (2016).

10. Une règle de vote est dite surjective si, pour tout candidat, il existe un profil de vote qui élit ce candidat. Plus précisément, il est seulement nécessaire dans ce théorème que la règle de vote puisse aboutir à au moins trois issues différentes.

11. Ces règles sont présentées en section 2.3.

Vote sur des domaines combinatoires Ce sujet soulève la question de la structure de l'ensemble des alternatives. Dans certains cas, cette structure est simple et le nombre d'alternatives est faible, comme lors d'une élection présidentielle. Mais il arrive que l'ensemble des alternatives possède une *structure combinatoire* complexe qui conduise à un nombre élevé d'alternatives. Donnons trois exemples tirés de Lang et Xia (2016) pour illustrer cette possibilité. Le premier exemple est celui des référendums multiples, en particulier aux États-Unis. Lors des élections présidentielles américaines de 2012, les électeurs de l'état de Californie ont voté sur onze référendums. Ces propositions n'étaient pas indépendantes puisque cinq d'entre elles portaient sur des questions de budget et de taxe, et en particulier deux d'entre elles proposaient deux manières différentes d'augmenter les taxes pour l'éducation. Le second exemple est celui de la planification de groupe. Un groupe d'individus doit décider d'un menu commun composé d'une entrée, d'un plat principal, d'un dessert et d'une boisson, avec pour chaque catégorie quelques valeurs disponibles. Le dernier exemple est celui de l'élection de comités. Il s'agit de choisir un ensemble de représentants parmi un ensemble de candidats. Les élections de comités représentatifs sont fréquentes, par exemple l'élection d'un comité scientifique dans un laboratoire.
Ces trois exemples ont en commun la structure combinatoire de l'ensemble de leurs alternatives. En effet, cet ensemble est un produit cartésien de plusieurs domaines, où chaque domaine est composé d'un ensemble fini de valeurs pour une variable donnée. Dans ce contexte, les méthodes de vote sont évaluées sur des critères comme l'expressivité, le coût de communication, le coût de calcul, ou encore la qualité de la solution. On trouvera une présentation détaillée de ce domaine dans Lang et Xia (2016).

1.4 Principaux thèmes abordés dans cette thèse

Le fil conducteur de cette thèse est le *vote par approbation*, étudié dans le cadre du vote sur des domaines combinatoires dans le chapitre 4, avec un traitement particulier des élections de comités et référendums multiples dans les chapitres 3 et 5, mais aussi dans le cadre du vote à vainqueur unique dans le chapitre 5. La figure 1.1 donne un vue d'ensemble des principaux thèmes abordés dans cette thèse.

Contrairement aux règles de vote évoquées jusqu'à présent, le vote par approbation ne requiert pas un classement complet des candidats de la part des votants. Dans ce système, chaque votant est libre de voter pour ("d'approuver") le nombre de candidats qu'il souhaite. Un vote est donc un sous-ensemble de candidats approuvés. Dans le cas où il s'agit d'élire un seul candidat, il n'y a pas d'ambiguïté sur la manière de procéder, le candidat ayant été le plus approuvé est élu. Il existe de nombreuses situations de la vie de tous les jours qui ont recours au vote par approbation à vainqueur unique :

Le choix d'une date de réunion Ici, chaque votant approuve les dates où il est disponible et la date choisie est celle qui rassemble le plus de participants. Cette situation

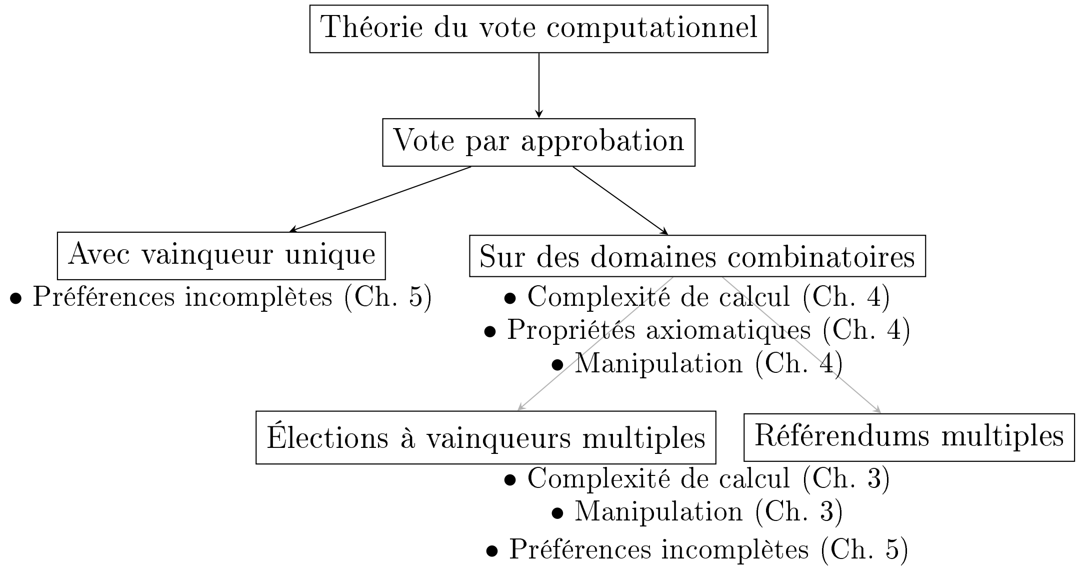

FIGURE 1.1 – Principaux thèmes abordés dans cette thèse.

est un exemple représentatif des sondages de type “Doodle”.

Le choix d'un film Il s'agit ici de choisir un film commun pour un groupe de votants. Chaque votant approuve les films qu'il souhaite voir, et le film choisi sera vu par l'ensemble des votants (pas seulement ceux qui l'ont approuvé). Cela correspond plus généralement à la situation de choix d'une activité pour un groupe (choix d'un restaurant, d'une destination de vacances).

Le calcul du vainqueur dans le vote par approbation à vainqueur unique est immédiat, cependant nous verrons dans le chapitre 5 que lorsque les préférences sont incomplètes, des difficultés algorithmiques peuvent apparaître. Illustrons cette méthode de vote en considérant la situation suivante : un groupe de onze votants doit choisir un délégué parmi un ensemble de quatre candidats. Le tableau suivant résume les préférences des votants. Dans cette situation, quatre votants approuvent seulement le candidat Lionel, tandis que

4	{Lionel}
3	{Nicolas, Jean-Marie}
2	{Nicolas, Lionel, Christiane}
2	{Jean-Marie, Nicolas, Lionel}

trois votants approuvent les candidats Nicolas et Jean-Marie, et ainsi de suite. Le candidat Lionel est donc élu.

Supposons maintenant que l'on souhaite élire deux représentants parmi les quatre candidats. L'élection de deux représentants rentre dans la catégorie des élections à vainqueurs multiples. Le vote par approbation est utilisé dans de nombreux cas d'élections à vainqueurs multiples, dont voici quelques exemples :

L'élection d'un comité représentatif Il s'agit ici d'élire un comité pour un ensemble d'agents, comme le comité scientifique d'un laboratoire, le comité d'une entreprise ou bien d'une association. Généralement, dans ces situations, les votants ne peuvent approuver qu'un nombre de candidats inférieur ou égal au nombre de places disponibles au sein du comité. Il s'agit d'une forme contrainte de vote par approbation à vainqueurs multiples.

Certaines élections politiques françaises Les élections municipales en France dans les communes de moins de 1000 habitants se déroulent suivant un scrutin plurinominal majoritaire à deux tours avec panachage, ce qui correspond à une forme de vote par approbation à deux tours. Les candidats se présentent sous une liste ou comme candidat indépendant. Les votants peuvent alors voter pour le nombre de candidats qu'il souhaite, sans contrainte d'appartenance à une liste.

Le choix d'un sous-ensemble d'objets Il s'agit de choisir un sous-ensemble d'objets ou d'activités parmi un ensemble plus grand. Il peut s'agir de choix d'un ensemble de villes à visiter lors d'un voyage commun, d'un ensemble d'activités sociales lors d'une conférence, ou encore d'un ensemble de livres à inclure dans une bibliothèque. Ici, chaque votant approuve les objets ou activités qui lui conviennent.

Citons aussi les *référendums multiples* qui ne rentrent pas dans cette catégorie mais possèdent une structure similaire à celle des élections de comités. Dans ces situations, les électeurs sont libres d'approuver ou de rejeter chacune des propositions. Il n'existe pas non plus de contraintes sur le nombre de propositions finalement acceptées. Le lien entre ces deux situations est clair : dans les deux cas, il s'agit de choisir collectivement un vecteur de valeurs binaires, correspondant dans un cas à un comité, dans l'autre cas à un ensemble de propositions adoptées.

La méthode la plus simple pour élire deux candidats dans notre exemple est de choisir ceux qui ont été approuvés le plus de fois. Avec les mêmes préférences que précédemment, les candidats Lionel et Nicolas sont alors élus. Cette méthode est la plus utilisée en pratique. Cependant, il existe d'autres méthodes pour choisir l'ensemble des candidats vainqueurs [12]. Dans le chapitre 3, nous étudions la complexité de calcul et la manipulation d'un sous-ensemble de ces méthodes, appelées méthodes de centralisation, qui consistent à choisir le sous-ensemble de candidats le plus consensuel. Dans la fin du chapitre 5, l'ensemble de ces méthodes sont étudiées lorsque les préférences des votants sont incomplètes.

Les élections à vainqueurs multiples abordées ci-dessus sont un cas particulier du vote sur des domaines combinatoires. Comme énoncé plus haut, le vote sur des *domaines combinatoires* étudie les situations de vote où l'ensemble des alternatives possède une structure combinatoire. Plus précisément, l'ensemble des alternatives est formé par le produit

12. Ces méthodes sont présentées en détail dans la section 2.3.4.

cartésien de variables qui peuvent prendre un ensemble fini de valeurs. Considérons une situation de choix d'un menu commun pour un groupe d'agents. Il faut choisir le plat, le dessert et la boisson : le plat peut être du lapin (l), de l'agneau (a) ou de la perche (p), la boisson, du vin rouge (r), du blanc (b) ou un soda (s), le dessert, une tarte au chocolat (t), un flanc (f) ou un crumble au pomme (c). L'ensemble des alternatives possède alors une structure combinatoire puisqu'il s'agit du produit cartésien de trois variables : $D = \{l, a, p\} \times \{r, b, s\} \times \{t, f, c\}$. Le principal problème est alors de trouver un compromis entre expressivité, qualité de la solution et efficacité de la méthode de vote. Il existe plusieurs manières de répondre à ce problème.
Dans un premier temps, on peut essayer d'appliquer les règles de vote habituelles. Cependant la plupart de ces règles nécessitent un classement complet des alternatives ce qui demanderait un coût de communication élevé et un effort cognitif prohibitif pour les votants.
Dans un second temps, comme pour les référendums multiples, on peut voter sur le plat, la boisson et le dessert de façon indépendante. Mais ces trois domaines ne sont pas indépendants et l'on pourrait se retrouver avec une situation qu'aucun votant ne souhaite, comme manger de l'agneau en buvant du vin blanc. De façon similaire, le vote séquentiel sur le plat, puis sur la boisson et enfin sur le dessert peut conduire à un menu peu apprécié par les votants, mais en général plus acceptable que les solutions du vote en parallèle.
Finalement, on peut, dans un premier temps, demander aux votants une partie réduite de leurs préférences. On leur demande par exemple leur menu préféré, ou un petit nombre de menus qu'ils approuvent. Puis, dans un second temps, on complète ces préférences avec un principe de complétion. Dans le chapitre 4, nous explorons cette idée en proposant de nouvelles méthodes de vote, fondées sur le vote par approbation à l'aide de préférences conditionnelles.

1.5 Plan de la thèse

Pour conclure cette introduction, présentons rapidement le contenu de chacun des chapitres de cette thèse.

Dans le chapitre 2, je présente les notions essentielles de la théorie du vote, comme les hypothèses sur les préférences, les règles de vote à vainqueur unique et à vainqueurs multiples, et enfin les questions principales qui seront abordées dans cette thèse, à savoir, la complexité de calcul, la manipulation, les problèmes de vainqueurs possibles et nécessaires et le vote sur des domaines combinatoires.

Les trois chapitres principaux, c'est-à-dire les chapitres 3, 4, 5, peuvent être abordés de manière indépendante par le lecteur.

Le chapitre 3 se concentre sur le vote par approbation dans le contexte d'élections de comités et des référendums multiples. J'y présente les règles de vote existantes dans ce domaine avant d'expliquer comment généraliser une partie de ces règles. Ensuite, j'étudie cette famille générale de règles de vote du point de vue de la complexité de calcul, de la manipulation et enfin du nombre moyen de comités vainqueurs ex aequo.

Puis, au chapitre 4, je me place dans le contexte plus général du vote sur des domaines combinatoires, toujours à l'aide du vote par approbation. J'y explique plusieurs méthodes de vote fondées sur des préférences conditionnelles, puis j'étudie leurs propriétés axiomatiques ainsi que leur manipulation.

Enfin, le chapitre 5 s'intéresse aux préférences incomplètes dans le contexte du vote par approbation. Les questions abordées sont celles des vainqueurs possibles et nécessaires, dans le vote par approbation à vainqueur unique puis à vainqueurs multiples. De plus, dans le cas du vote à vainqueur unique, je m'intéresse à la question de la robustesse du vote par approbation en fonction du nombre de candidats approuvés par les votants.

L'annexe me permet de renseigner certaines preuves écartées des chapitres principaux pour en faciliter la lecture.

Pour terminer, la conclusion est composée d'un résumé des résultats obtenus et d'un ensemble de perspectives de recherche, prolongeant ce travail de thèse.

Chapitre 2
Préliminaires sur le vote

Résumé Dans ce chapitre, j'introduis les notions de la théorie du vote nécessaires à la bonne lecture de la thèse. Je commence par présenter les moyens de représentation des préférences des votants, en définissant les notions de préférences ordinales, cardinales et dichotomiques. Puis, j'introduis les principales règles de vote à vainqueur unique et à vainqueurs multiples, en portant une attention particulière aux règles de votes basées sur le vote par approbation. Je mentionne ensuite la notion de départage des ex aequo, puis je présente quelques propriétés axiomatiques. Enfin, je présente quatres thèmes abordés dans cette thèse, à savoir, la complexité de la détermination d'un vainqueur, la manipulation, le problème des vainqueurs possibles et le vote sur des domaines combinatoires.

Sommaire

Dans ce chapitre, je contextualise cette thèse en introduisant les notions essentielles de la théorie du vote computationnel. D'autres notions seront introduites au cours des chapitres lorsque cela sera nécessaire.

Rappelons que le choix social s'intéresse aux procédures d'agrégation de préférences individuelles en une décision collective. Le vote est un moyen répandu pour effectuer cette agrégation des préférences. Dans ce cadre, les membres du groupes sont appelés votants (ou agents) et les objets sur lesquels portent leurs préférences sont appelés des candidats (ou alternatives). La première question que l'on peut se poser est la question de la représentation des préférences des individus.

2.1 Préférences

Le terme votant représente tout individu qui possède des préférences sur un ensemble fini de candidats. Tout au long de cette thèse, l'*ensemble des votants* est noté $N = \{1, \ldots, n\}$ et l'*ensemble des candidats* est noté $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Remarquons que l'ensemble des candidats peut être un ensemble d'individus ou un ensemble de choix ou d'actions mutuellement exclusifs. Les préférences des votants se rangent en trois catégories principales : les préférences *ordinales*, les préférences *dichotomiques* et les préférences *cardinales*.

2.1.1 Préférences ordinales

L'hypothèse usuelle qui est faite en choix social est celle des préférences ordinales. On suppose que les préférences d'un votant i sont données par une relation de préférence, c'est-à-dire, une relation binaire et complète $\mathcal{R}_i \subseteq X \times X$. Pour une paire de candidats $(a, b) \in \mathcal{R}_i$, on notera $a\mathcal{R}_i b$ si *a est préféré à b* par le votant i. On dit qu'une relation est *complète* lorsque chaque votant i est capable de comparer toutes paires de candidats : pour tout $(a, b) \in X$, soit $a\mathcal{R}_i b$ ou $b\mathcal{R}_i a$ ou bien les deux lorsque le votant est *indifférent* entre a et b. De plus, on impose souvent à la relation de préférence d'être *transitive* et *antisymétrique*. La transitivité est une hypothèse courante en économie et impose que pour tout $a, b, c \in X$, tel que $a\mathcal{R}_i b$ et $b\mathcal{R}_i c$, on ait $a\mathcal{R}_i c$. L'antisymétrie qui est presque aussi fréquente, impose que pour tout $a, b \in X$, si $a\mathcal{R}_i b$ alors non $b\mathcal{R}_i c$, ce qui a pour conséquence principale de ne pas autoriser l'indifférence.
Un *profil de préférences* $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$ est alors un vecteur contenant une relation de préférence par votant. De plus, si une relation de préférence est à la fois transitive et antisymétrique nous parlons alors d'*ordre de préférence* ou, de façon similaire, de préférence linéaire. Si un profil de préférences est composé d'ordres de préférence, on parle alors de *profil d'ordres*.

Illustrons ces notions à l'aide d'un exemple.

Exemple 2.1. *Considérons un ensemble de cinq votants* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$*, un ensemble de trois* *candidats* $\{x_1, x_2, x_3\}$, *et le profil de préférences* P *suivant :*

$$\begin{array}{ll} P_1: & x_1 \succ x_2 \succ x_3 \\ P_2: & x_1 \succ x_3 \succ x_2 \\ P_3: & x_3 \succ x_2 \succ x_1 \\ P_4: & x_3 \succ x_1 \succ x_2 \\ P_5: & x_2 \succ x_1 \succ x_3 \end{array}$$

Les préférences du votant 1 exprime le fait qu'il préfère x_1 *à* x_2*, qu'il préfère* x_2 *à* x_3 *et donc* x_1 *à* x_3 *par transitivité.*

2.1.2 Préférences cardinales

Remarquons que modéliser les préférences par une relation binaire, comme c'est le cas pour les préférences ordinales, ne permet pas d'exprimer une intensité de préférence ou encore de comparer le bien-être de deux votants. Ceci est réalisable naturellement avec l'hypothèse de préférences cardinales. On suppose dans ce cas qu'un votant peut exprimer la satisfaction que lui procure un candidat en le positionnant sur une échelle cardinale prédéfinie, en général une *échelle de scores*. Les préférences d'un votant sont données par un vecteur de score P_i de taille m, contenant un score par candidat. Un profil de préférences $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$ est alors un ensemble de vecteurs de scores.

Exemple 2.2. *Considérons un ensemble de cinq votants* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$*, un ensemble de trois candidats* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *et une échelle de scores allant de 1 à 5. Le profil est le suivant :*

$$\begin{array}{ll} P_1: & (4,2,2) \\ P_2: & (5,1,3) \\ P_3: & (2,3,4) \\ P_4: & (1,1,2) \\ P_5: & (3,3,1) \end{array}$$

Le votant 1 accorde quatre points au candidat x_1 *et deux points à chacun des candidats* x_2 *et* x_3*.*

2.1.3 Préférences dichotomiques

Dans l'hypothèse de préférences dichotomiques, on suppose qu'un votant sépare l'ensemble des candidats en deux sous-ensembles, l'ensemble des "bons" candidats (*candidats approuvés*) et l'ensemble des "mauvais" candidats (*candidats rejetés*). Les votants sont indifférents entre deux candidats du même sous-ensemble. Les préférences d'un votant i sont donc exprimées par la donnée d'un des deux sous-ensembles de candidats. Un profil de préférences dichotomiques, P, est alors un ensemble de sous-ensembles de candidats.

Exemple 2.3. *Considérons un ensemble de cinq votants* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$*, et un ensemble de trois candidats* $\{x_1, x_2, x_3\}$*. Le profil* P *est le suivant :*

$$\begin{array}{ll} P_1: & \{x_1, x_2\} \\ P_2: & \{x_1\} \\ P_3: & \{x_2, x_3\} \\ P_4: & \{x_1, x_2, x_3\} \\ P_5: & \{x_2\} \end{array}$$

Le votant 2 approuve uniquement le candidat x_1 *tandis que le votant 4 approuve tous les candidats.*

Pour des raisons pratiques, nous définirons les préférences dichotomiques d'un votant i à l'aide d'un vecteur binaire $P_i \in \{0, 1\}^m$ avec la signification que la j^e coordonnée du vecteur P_i est égale à 1 si le votant i approuve le candidat x_j et 0 sinon. Un profil de préférences $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$ est alors un vecteur contenant un vecteur binaire par votant.

Exemple 2.4. *Considérons un ensemble de cinq votants* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$*, un ensemble de trois candidats* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *et le même profil* P *que dans l'exemple précédant :*

$$\begin{array}{ll} P_1: & (110) \\ P_2: & (100) \\ P_3: & (011) \\ P_4: & (111) \\ P_5: & (010) \end{array}$$

De même, le votant 2 approuve uniquement le candidat x_1 *tandis que le votant 4 approuve tous les candidats.*

Enfin, remarquons que les préférences dichotomiques peuvent être considérées comme un cas particulier des préférences ordinales incomplètes avec deux classes d'équivalence, ou comme un cas particulier de préférences cardinales avec une échelle de scores à deux niveaux.

2.2 Règles de vote à vainqueur unique

Une fois les préférences des votants exprimées, il est nécessaire de les agréger en un choix commun, par l'utilisation de règles de vote. Un triplet $E = (N, X, P)$ composé d'un ensemble de votants N, d'un ensemble de candidats X et d'un profil de préférences P, est appelé une *élection*. Commençons par faire la distinction entre les *règles de vote à vainqueur unique*, dans lesquelles on élit un unique candidat, présentées en section 2.2, et les *règles de vote à vainqueurs multiples* dans lesquelles on choisit un sous-ensemble de candidats (appelé *comité*), présentées en section 2.3. Pour ces deux types de règles, nous présenterons les principales familles de règles se fondant sur des préférences ordinales, puis quelques exemples de règles se fondant sur des préférences cardinales, pour enfin présenter plus en détail le vote par approbation.

2.2.1 Règles fondées sur des préférences ordinales

2.2.1.a Règles de scores positionnelles

Un exemple de règle de vote répandue dans les élections politiques est la règle de *pluralité*. Dans ce système, chaque votant accorde un point à son candidat préféré, c'est-à-dire, rangé en premier dans son ordre de préférences. Le candidat élu est alors le candidat qui a reçu le plus de points au total. Un autre exemple moins répandue est la règle de *veto*, où chaque votant donne un point à tous les candidats sauf au candidat qu'il préfère le moins. Le candidat ayant reçu le plus de points, c'est-à-dire, le candidat rangé le moins de fois en dernier, est élu. Un troisième exemple de règle de vote est l'exemple de la règle de *Borda*, déjà citée en introduction : chaque votant donne $m-1$ points à son candidat préféré, $m-2$ points à son second candidat préféré, et ainsi de suite jusqu'à son candidat le moins préféré qui ne reçoit aucun point. Le candidat élu est celui ayant reçu le plus de points.
Ces trois règles de vote font partie d'une famille plus générale de règles que l'on nomme *règles de scores positionnelles.* Une règle de score positionnelle peut être exprimée par un vecteur de scores $a = (a_1, \ldots, a_m)$, où les a_i sont des nombres réels tels que $a_1 \geq \ldots \geq a_m$ et $a_1 > a_m$. Chaque votant attribue a_1 points à son candidat préféré, a_2 points à son second candidat préféré, et ainsi de suite jusqu'à attribuer a_m points à son candidat le moins préféré. Finalement, le candidat élu est le candidat avec le plus de points. Les vecteurs de scores des trois règles citées en exemple sont les suivants :

- Pluralité : $a = (1, 0 \ldots, 0)$.
- Veto : $a = (1, 1 \ldots, 1, 0)$.
- Borda : $a = (m-1, m-2 \ldots, 0)$.

2.2.1.b Règles Condorcet cohérentes

Le critère de Condorcet, énoncé au $XVIII^e$ siècle par le philosophe éponyme, est un critère majeur dans le choix d'une règle de vote. Nicolas de Condorcet proposa que le vainqueur d'une élection soit le candidat qui gagne contre tous les autres lors d'un face à face, appelé *vainqueur de Condorcet.* Ainsi, dans l'exemple 2.1, le candidat x_1 est vainqueur de Condorcet puisqu'il est préféré au candidat x_2 et au candidat x_3 par trois votants sur cinq. Cependant, il existe des profils de préférences dans lesquels il n'existe pas de vainqueur de Condorcet, ce que l'on nomme le *paradoxe de Condorcet.*
Une règle de vote qui élit le vainqueur de Condorcet lorsqu'il existe sera dite *Condorcet cohérente.* Donnons la définition des règles Condorcet cohérentes les plus importantes :

Copeland$_\alpha$ Pour toute paire de candidats (x, y), nous simulons une élection en face à face. Le vainqueur de cette simulation est le candidat préféré à l'autre candidat par le plus de votants. Un candidat se voit attribué 1 point pour chaque victoire en comparaison par paire, α point lors d'une égalité ($0 \leq \alpha \leq 1$) et 0 point sinon. La somme de ces points est appelé le *score de Copeland* de ce candidat. Le vainqueur de l'élection est alors le candidat maximisant le score de Copeland. On remarque qu'un vainqueur de Condorcet possède un score de Copeland de $m-1$ puisqu'il bat chaque candidat en comparaison par paire. De plus, les autres candidats ont un score de Copeland inférieur à $m-2$ puisqu'ils sont au moins battu par le vainqueur de Condorcet. La règle de Copeland est donc bien Condorcet cohérente.

Maximin (ou Simpson) Pour toute paire de candidats (x, y), définissons le nombre suivant : $N(x, y) = |\{i \in N : xR_iy\}|$, qui représente le nombre de votants qui préfèrent x à y. On définit le *score de maximin* d'un candidat x par $min_{y \neq x} N(x, y)$. En d'autres termes, ce score est le résultat de la plus mauvaise comparaison par paire de x. Le vainqueur est alors le candidat qui maximise le score de maximin. Puisque qu'un vainqueur de Condorcet possède un score supérieur à $n/2$, la règle maximin est Condorcet cohérente.

Kemeny Dans cette méthode, un score est calculé pour chaque classement possible des candidats. Ce score mesure la distance du classement au profil. Étant donné un classement, pour chaque paire de candidat (x, y) on compte le nombre de votants qui ne sont pas d'accords avec la comparaison donnée par le classement. Le score de ce classement est la *somme du nombre de désaccords* obtenus pour chaque paire de candidats. Le classement le plus populaire est celui qui possède le score le plus faible. Le candidat en première position du classement le plus populaire est élu vainqueur. Un candidat vainqueur de Condorcet, s'il existe, est nécessairement en première position du classement le plus populaire, et la règle de Kemeny est donc Condorcet cohérente.

Dodgson La règle de Dodgson est une extension du principe de Condorcet, elle choisit le candidat qui est le plus proche d'être un vainqueur de Condorcet. Le score de Dodgson d'un candidat x est le *nombre minimal d'échanges nécessaires* entre deux candidats adjacents dans un vote pour que ce candidat devienne vainqueur de Condorcet. Il est évident que cette règle est Condorcet cohérente.

2.2.1.c Autres règles de vote

De nombreuses règles de vote ne se classent ni dans la première catégorie, ni dans la seconde. Présentons-en quelques unes :

Scrutin à vote unique transférable (STV) STV est une règle qui a été utilisé dans de nombreuses élections politiques et qui l'est toujours aujourd'hui pour certaines élections locales dans plusieurs pays dont la Nouvelle-Zélande. Cette règle procède par tour, au cours desquels les candidats sont éliminés au fur et à mesure. À chaque tour, le score d'un candidat x est le nombre de votants qui préfèrent x à tous les candidats restants. Le candidat avec le score le plus faible est alors éliminé de l'élection et des votes, puis le tour suivant commence. Le candidat vainqueur est alors le dernier candidat restant ou, de façon équivalente, le premier candidat à obtenir un score strictement supérieur à la majorité.

Pluralité à deux tours La pluralité à deux tours est une règle très populaire en politique, utilisée par exemple pour élire le président en France, au Portugal et dans bien d'autres pays, aussi bien en Europe qu'en Amérique latine ou dans les pays d'Afrique francophone. Ce système est similaire à STV mais ne met en jeu que deux tours. Au premier tour, les deux candidats ayant été classés en premier par le plus grand nombre de votants sont admis au second tour. Le second tour est alors un face à face entre ces deux candidats.

2.2.2 Règles fondées sur des préférences cardinales

Les règles de vote avec préférences cardinales sont moins répandues, nous-en citerons deux :

Vote par valeurs Le vote par valeurs est une méthode de vote où chaque votant évalue chaque candidat à l'aide d'une *échelle de scores* prédéfinie, telle qu'une échelle allant de 0 à 99 ou encore de 1 à 5. Le score total d'un candidat x est égal à la somme des scores attribués à x par chaque votant. Le vainqueur est le candidat qui possède le score total le plus élevé. Ces règles sont souvent utilisées dans les compétitions sportives, par exemple en patin à glace, augmentées d'une élimination des scores extrêmes pour limiter la surévaluation, et en surf.

Jugement majoritaire Dans le jugement majoritaire, les votants associent un grade (ou jugement) à chaque candidat. Balinski et Laraki (2011), qui ont introduit cette méthode, ont proposé une échelle à six niveaux, allant de "Excellent" à "Rejeté". On évalue alors le grade médian pour chaque candidat. Le candidat élu est le candidat possédant le grade médian le plus élevé.

2.2.3 Vote par approbation

Dans cette section, nous présentons le vote par approbation qui est le fil conducteur de cette thèse. En effet, nous étudierons les liens du vote par approbation avec les règles de vote à vainqueurs multiples dans le chapitre 3, avec le vote sur des domaines combinatoires dans le chapitre 4 et enfin avec l'agrégation de préférences incomplètes dans le chapitre 5. Le vote par approbation dans le cadre des élections à vainqueurs multiples sera présenté dans la section 2.3.4.

Le vote par approbation est un système où chaque votant vote pour (*"approuve"*) le nombre de candidats qu'il souhaite. Dans ce système, introduit par Brams et Fishburn (1978), un votant est amené à se demander séparément pour chaque candidat s'il approuve ou non ce dernier pour le poste visé. Ce système demande donc aux votants de fournir des préférences dichotomiques en classant chaque candidat dans le groupe des candidats

approuvés ou bien rejetés. Le vainqueur est alors le candidat qui a reçu le plus d'approbation.
Le domaine du vote par approbation est un domaine important du choix social, qui a engendré une centaine d'articles scientifiques et un handbook (Laslier et Sanver, 2010).

Reprenons le profil de l'exemple 2.4, pour illustrer cette règle.

Exemple 2.5. *Le profil d'approbations est le suivant :*

$$\begin{array}{rl} P_1: & (101) \\ P_2: & (001) \\ P_3: & (011) \\ P_4: & (111) \\ P_5: & (010) \end{array}$$

Le nombre d'approbations du candidat x_1, respectivement x_2, x_3, est 2, respectivement 3, 4. Le candidat élu est donc x_3.

Ce système a été adopté comme système de vote par plusieurs associations telles que "the Mathematical Association of America", "the American Statistical Association" ou encore "the Institute of Electrical and Electronics Engineers", abandonné depuis 2002 par cette dernière.

Brams et Herschbach (2001) ont argumenté que le vote par approbation permet d'augmenter la participation des votants, de donner plus de poids aux partis mineurs et de réduire les campagnes négatives contre les adversaires. Mais ces avantages sont contrebalancés par le fait que le vote par approbation peut théoriquement élire un candidat qui n'aurait aucun vote en sa faveur sous pluralité, ou encore ne pas élire un candidat qui aurait une majorité de vote en sa faveur sous pluralité. Un autre avantage du vote par approbation est le nombre élevé de votes entre lesquels un votant peut choisir. En effet, avec m candidats, un votant peut approuver ou rejeter chaque candidat, ce qui donne un nombre total de 2^m votes possibles. Cependant, dans le cadre d'une élection à vainqueur unique, une abstention est équivalente à un vote pour tous les candidats. Ainsi le nombre de choix est $2^m - 1$ en pratique. En comparaison, la pluralité n'autorise que $m + 1$ votes différents.

Dans certaines situations, les votants ne sont autorisés qu'à approuver un nombre limité de votants, k. On parle alors de *k-approbation*, ce qui ne correspond plus vraiment au vote par approbation, dont la caractéristique principale est de permettre aux votants d'approuver le nombre de candidats qu'ils souhaitent.

On remarquera que le vote par approbation ne permet pas aux votants de faire la distinction entre un candidat désapprouvé et un candidat neutre ; ceci peut être réalisé par des règles basées sur des domaines de votes à trois niveaux d'approbations, étudiées par exemple dans Laruelle et Valenciano (2012) et Alcantud et Laruelle (2014).

Enfin, on remarquera que le vote par approbation peut être vu comme une forme de vote par valeurs réduit à deux valeurs, 0 et 1, comme une forme de vote par jugement majoritaire avec deux grades, “approuvé” et “rejeté”, ou encore comme extension plurinominale de pluralité. De plus, le vote par k-approbation peut être considéré comme une règle de scores positionnelle avec un vecteur de scores de la forme $(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, contenant k fois le score 1.

2.2.4 Départage des ex aequo

Il est évident que chacune des règles ci-dessus peut amener à une situation d'égalité entre candidats, c'est-à-dire, une situation où il existe plusieurs candidats qui vérifient le critère de la règle pour être élu. Il est nécessaire de définir à ce moment le caractère *résolu* ou *irrésolu* d'une règle de vote :

Règles de vote irrésolues Les règles de votes irrésolues ou non déterministes, ou encore correspondances de choix social, ont pour résultat un sous-ensemble de candidats composé de l'ensemble des candidats vainqueurs ex aequo. En cas d'égalité, ces règles ne tranchent pas en faveur d'un candidat spécifique.

Règles de vote résolues Les règles de vote résolues ou déterministes, ou encore fonctions de choix social, ont pour résultat un candidat unique. En cas d'égalité, un mécanisme de départage des ex aequo est utilisé pour déterminer le vainqueur.

Dans la pratique, en particulier dans les élections politiques, il est nécessaire d'utiliser des règles dites résolues. Une règle de vote résolue s'obtient par la composition d'une règle irrésolue et d'un *mécanisme de départage des ex aequo*, noté T. Typiquement, afin de préserver l'anonymat des votants, le mécanisme de départage des ex aequo est une *règle de priorité* sur l'ensemble des candidats. Ainsi, dans le cas où il existe plusieurs candidats vainqueurs ex aequo, le candidat renvoyé par la règle résolue est le candidat le plus prioritaire (suivant T) parmi les candidats vainqueurs. Par exemple, en France, en cas d'égalité entre deux députés aux élections législatives, le candidat le plus âgé est élu. La règle de priorité dans ce cas-ci est donc l'ordre des naissances des candidats.

2.2.5 Propriétés axiomatiques

Comme nous l'avons précisé en section 2.1, les théoriciens du vote supposent généralement que les préférences des votants sont ordinales. Avec cette hypothèse, il devient difficile de mesurer à quel point un candidat est bon pour un ensemble de votants. Dès lors, il est tout aussi difficile d'évaluer les performances d'une règle de vote de façon objective. Pour surmonter cette difficulté, de nombreuses propriétés, ou *axiomes*, jugées désirables dans le cadre d'un système de vote démocratique, ont été proposées. Des résultats d'impossibilités, comme celui d'Arrow (1951) et celui de Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975), énoncent qu'il n'existe pas de règle de vote qui satisfasse un petit ensemble de propriétés essentielles. Ainsi, chaque règle de vote ne parvient pas à satisfaire au moins un de ces critères. Cela signifie qu'il est nécessaire de faire un compromis lors du choix la règle à appliquer en fonction du contexte de décision dans lequel on se trouve. Présentons quelques une de ces propriétés, énoncées pour une règle r résolue à vainqueur unique. Nous noterons $r(P)$ la solution renvoyée par une règle r, étant donné un profil de préférences P.

Anonymat r est anonyme si une permutation des votants ne perturbe pas le résultat.

Neutralité r est neutre si une permutation des candidats dans les préférences induit une permutation similaire du résultat.

Non imposition r est dite non imposée si pour tout ensemble de candidats X et pour tout candidat $x \in X$, il existe un profil P tel que $r(P) = x$.

Unanimité r vérifie l'unanimité si lorsque tous les votants possèdent le même candidat préféré, x, alors $r(P) = x$.

Consistance r est consistante si lorsqu'il existe deux profils différents P_1 et P_2, tels que $r(P_1) = r(P_2)$, alors $r(P_1 \cup P_2) = r(P_1) = r(P_2)$.

Homogénéité r est homogène si pour tout profil P et tout entier naturel n, non nul, $r(nP) = r(P)$, où nP représente le profil constitué de n copies de P.

Efficacité de Pareto r est efficace au sens de Pareto, si pour tout profil P, il n'existe pas de candidat x qui soit préféré à $r(P)$ par chaque votant.

Monotonie r est monotone si pour tout profil P et tout profil P' obtenu à partir de P en améliorant seulement le classement de $r(P)$, on a $r(P') = r(P)$.

Critère de Condorcet r vérifie le critère de Condorcet si lorsqu'il existe un vainqueur de Condorcet dans un profil P, $r(P)$ est ce vainqueur de Condorcet.

2.3 Règles de vote à vainqueurs multiples

Les démocraties indirectes modernes ont souvent recours aux règles de vote à vainqueurs multiples pour l'élection de représentants. Une règle de vote à vainqueurs multiples a pour objectif de choisir le sous-ensemble de candidats, de taille fixée ou non, qui reflète au mieux les préférences des votants. Bien qu'il soit possible d'étendre de façon naturelle les règles à vainqueur unique au cas où plusieurs candidats sont élus, les règles obtenues ne répondent en général pas aux besoins spécifiques du vote à vainqueurs multiples. En particulier, la notion essentielle de *représentation proportionnelle* n'est jamais capturée par l'extension d'une règle à vainqueur unique. La représentation proportionnelle requiert intuitivement qu'un groupe homogène de taille t de l'électorat soit représenté par un groupe de candidats élus de taille proportionnelle à t.

Nous supposons toujours dans cette section que les votants possèdent des préférences sur l'ensemble des candidats. Le résultat d'une élection à vainqueurs multiples est un sous-ensemble non-vide de candidats, noté *comité*. La plupart des règles présentées ici utilisent les préférences sur les candidats pour choisir un comité vainqueur, ce qui fait de l'élection à vainqueurs multiples un cas à part au sein du vote sur des domaines combinatoires, présenté plus généralement en section 2.7.

En général, il est fait l'hypothèse que la taille du comité est fixée à l'avance, nous noterons k cette taille ; cela est souvent le cas en pratique où l'on connaît à l'avance le nombre de sièges à pourvoir dans une assemblée ou un comité. Cependant il existe des situations où le nombre de candidats vainqueurs n'est pas connu à l'avance, par exemple lors du choix des nouveaux membres du "Hall of fame" de la ligue de baseball américaine. Par ailleurs, il existe un lien entre l'élection d'un comité et la tenue d'un référendum multiple. Dans ces deux situations, une décision collective doit être prise concernant plusieurs propositions binaires qui peuvent être intercorrélées : il s'agit de *choisir collectivement un vecteur de valeurs binaires*, correspondant dans un cas à un comité, dans l'autre cas à un ensemble de propositions adoptées. On trouvera une discussion sur les relations entre ces deux problématiques par Lang et Xia (2016).

Tout d'abord, nous présenterons les systèmes de vote non proportionnels. Puis nous discuterons des deux principaux systèmes de vote proportionnels, à savoir le système par liste et les méthodes de Monroe et de Chamberlin-Courant, dites de "représentation proportionnelle complète", qui correspondent à deux définitions totalement différentes de la représentation proportionnelle. Ensuite, nous présenterons le vote par approbation à vainqueurs multiples de façon détaillée. Enfin, nous mentionnerons le départage des ex aequo et quelques propriétés axiomatiques adaptées au contexte des élections à vainqueurs multiples.

2.3.1 Systèmes de vote non proportionnel

Certains systèmes de vote à vainqueur multiples ne cherchent pas à garantir une représentation proportionnelle de l'électorat, mais atteignent un certain niveau de représentation des groupes non majoritaires.

Scrutin à vote unique transférable (STV) Aussi connu sous le nom de PR-STV ou encore Hare-Clark, cette règle est utilisée pour les élections à vainqueurs multiples, lorsque la taille du comité à élire est fixée. Par exemple, elle est utilisée pour élire le comité de la ville de Cambridge. De plus cette règle reçoit l'appui de nombreux groupes qui militent pour généraliser son utilisation dans les pays anglo-saxons. Cette règle procède par tour, au cours desquels les candidats sont élus ou éliminés au fur et à mesure. À chaque tour, le score d'un candidat x est le nombre de votants qui préfèrent x à tous les candidats restants. Si un candidat atteint le seuil fixé, ou quota, il est élu, et le candidat avec le score le plus faible est alors éliminé. La procédure s'arrête lorsque la taille fixée du comité est atteinte.

Scrutin à vote unique non transférable (SNTV) Ce mode de scrutin peut être vu comme une extension de pluralité aux élections à vainqueurs multiples. Les votants attribuent un point à leur candidat préféré et les candidats élus sont les k candidats avec le plus de points.

Vote cumulatif Le vote cumulatif permet aux votants de distribuer librement un total de α points entre 1 à α candidats. De même, les candidats élus sont les k candidats avec le plus de points. Ce mode de scrutin est généralement utilisé dans les comités d'entreprises bien qu'il fût aussi adopté dans l'Illinois pour élire la chambre des représentants entre 1870 et 1980.

Citons enfin le scrutin majoritaire plurinominal ou *Bloc voting* qui est le mode de scrutin non-proportionnel le plus utilisé dans les élections à vainqueurs multiples. Il est équivalent au système de panachage en vigueur dans les élections municipales françaises pour les villes de moins de 1000 habitants. Dans ce système, les votants peuvent choisir jusqu'à k candidats, si k sièges sont à pourvoir. Les candidats élus sont les candidats ayant reçu le plus voix. Cette règle n'a pas pour objectif la représentation proportionnelle mais plutôt d'assurer la majorité des sièges au parti majoritaire.

2.3.2 Systèmes de vote proportionnel par liste

Le système de vote par liste est une famille de mécanismes de vote ayant pour objectif principal la représentation proportionnelle de l'électorat. Dans ce système, les partis présentent des listes de candidats et reçoivent un nombre de places proportionnel au nombre de votes reçus. En fonction des systèmes, les votants peuvent voter pour une liste, ou bien directement pour un parti, ou encore pour un candidat, dont le vote sera ajouté au total de son parti.

L'ordre par lequel les candidats d'un parti se voient attribuer un siège peut être défini par une méthode interne au parti (*liste fermée*), l'ordre est alors en général indiqué sur la liste ; ou bien déterminé par les votants (*liste ouverte*), qui votent alors pour les candidats. Le système de vote mixte utilise le système de liste pour une partie des sièges, tandis que l'autre partie est complétée par les vainqueurs d'élections locales.

Il existe de nombreuses méthodes pour allouer les sièges dans le vote proportionnel par liste, qui se divisent en deux catégories : celle du *plus grand reste* et celle de la *plus haute moyenne.*

Le plus grand reste Dans cette catégorie, le nombre de votes reçus par chaque parti est divisé par un *quota* représentant le nombre de votes nécessaires pour obtenir un siège. En général, ce quota est égal au nombre total de vote divisé par le nombre total de sièges. Le résultat pour chaque parti est un nombre fractionnaire. Dans un premier temps, chaque parti reçoit d'abord un nombre de sièges égal à la partie entière de ce nombre. Dans un second temps, les sièges vacants sont attribués un par un aux partis, en suivant l'ordre décroissant des restes. Il existe deux choix principaux pour le quota. Notons TV le nombre total de votes et TS le nombre total sièges. Le *quota de Hare* est égal à $\frac{TV}{TS}$, utilisé dans la méthode d'Hamilton, et le *quota de Droop* est égal à $\lfloor 1 + \frac{TV}{1+TS} \rfloor$. Le quota de Hare est légèrement plus favorable aux petits partis, tandis que le quota de Droop favorise les partis plus populaires.

La plus haute moyenne Dans cette méthode, le nombre de votes reçus par un parti est divisé successivement par une série de diviseurs. On obtient pour chaque parti un ensemble de quotients. Le parti possédant le plus grand quotient obtient un siège, puis le parti (qui peut être le même que le premier) possédant le second quotient le plus élevé obtient un siège, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les sièges soient attribués. Les différentes implémentations de cette méthode varient par le choix de la série de diviseurs. La plus utilisée est la méthode de *D'Hondt* dont la série de diviseurs est 1, 2, 3, 4, et ainsi de suite. Cette méthode a tendance à favoriser légèrement les partis populaires. La méthode de *Sainte-Laguë* dont la série de diviseurs est 1, 3, 5, 7 et ainsi de suite, ne favorise pas les partis populaires et peut ainsi être considérée comme plus proportionnelle.

Ces méthodes n'impliquent pas de problèmes computationnels significatifs. Nous ne les aborderons pas de nouveau dans cette thèse.

2.3.3 Monroe et Chamberlin-Courant

Á la fin du XX^e siècle, deux méthodes de vote ont été proposées par Monroe et par Chamberlin et Courant dans le but de garantir un niveau de représentation élevé. Il ne s'agit pas ici de représentation proportionnelle comme pour les systèmes par liste. Dans ces deux méthodes, on associe à chaque couple votant-candidat un score de représentation. Le but de ces règles est d'élire un comité qui maximise la représentation de chaque votant, tout en garantissant un niveau élevé de représentation globale.

Chamberlin-Courant Proposée par Chamberlin et Courant (1983), cette méthode s'assure que chaque votant soit représenté au mieux, tout en veillant à obtenir une représentation globale élevée. Pour un couple votant-candidat, on suppose qu'une valeur d'*insatisfaction*, μ_{ix}, est connue. Cette valeur évalue l'insatisfaction du votant i à être représenté par le candidat x. Étant donné un ensemble S de k candidats, l'insatisfaction du votant i, notée μ_{iS}, est égale à l'insatisfaction associée au meilleur candidat de S pour i. L'insatisfaction totale engendrée par l'élection du sous-ensemble S est donc $\sum_{i \in N} \mu_{iS}$. Le sous-ensemble élu est celui qui minimise l'insatisfaction totale. Le nombre de votants assignés à chaque candidat est arbitraire. La proportionnalité est assurée en donnant à un candidat (ou un parti) un poids dans le comité élu (ou un nombre de sièges dans l'assemblée) proportionnel au nombre de votants qu'il représente. Par ce biais, Chamberlin-Courant est considérée comme une version simplifiée de la méthode de Monroe, définie ci-dessous.

Monroe Cette règle, proche de la précédente, a été proposée par Monroe (1995). De même, pour un couple votant-candidat, on suppose qu'une valeur d'*insatisfaction*, μ_{ix}, est connue. Cette valeur évalue l'insatisfaction du votant i à être représenté par le candidat x. Étant donné un ensemble S de k candidats, on note f_S une fonction qui assigne les votants aux candidats de S ($f_S : N \mapsto S$). Si le sous-ensemble de candidats S est élu, l'insatisfaction du votant i est définie par $\mu_{if_S(i)}$. L'insatisfaction totale engendrée par l'élection du sous-ensemble S est donc $\sum_{i \in N} \mu_{if_S(i)}$. Le sous-ensemble élu est celui qui minimise l'insatisfaction totale. De plus, particularité du système de Monroe, la fonction f doit être *équilibrée*. Cela signifie que chaque candidat doit représenter le même nombre de votants, soit $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ votants, à une unité près.

Il existe différentes possibilités pour mesurer l'insatisfaction comme l'opposé du score de Borda, c'est-à-dire $(r_{ix} - m)$ où m est le nombre de candidats et r_{ix} le rang du candidat x dans le vote de i, ou encore le score d'approbation, égal à 1 si le votant approuve le candidat, 0 sinon.

Bien que séduisantes sur le plan de la représentation proportionnelle, ces deux règles ont été montrées difficiles à calculer, c'est-à-dire, que déterminer le comité vainqueur d'une élection peut être significativement long. De même, des variantes de ces méthodes, proposées par Betzler et al. (2013), sont difficiles à calculer.

2.3.4 Vote par approbation

Dans cette section, nous présentons le vote par approbation dans le contexte des élections à vainqueurs multiples. Ce thème est le sujet central du chapitre 3 et du chapitre 4, et sera étudié dans le cadre l'agrégation de préférences incomplètes dans le chapitre 5.

Le vote par approbation est un système où chaque votant approuve le nombre de candidats qu'il souhaite. Dans ce système, introduit par Kilgour et al. (2006) dans le contexte des élections à vainqueurs multiples, un votant est amené à fournir des préférences dichotomiques en classant chaque candidat dans le groupe des candidats approuvés ou bien rejetés. Ces préférences sur les candidats peuvent être étendues pour obtenir des préférences sur les comités comme nous le verrons en section 2.5.

En vote par approbation en vainqueur unique, il existe une unique façon de choisir le vainqueur. Ce n'est plus le cas lorsque l'on étend le vote par approbation aux élections à vainqueurs multiples. Les procédures utilisant le vote par approbation pour l'élection de comités se structurent en trois classes.

2.3.4.a Procédures de score

Dans cette classe de procédures, on associe à chaque comité un score, et le comité avec le plus grand score est déclaré vainqueur. Il existe de nombreuses manières de calculer le score mais chacune d'entre elles mesure la proximité d'un comité au profil. Dans cette catégorie, nous trouvons les procédures suivantes :

Approbation simple Dans l'approbation simple, le score d'un comité S, noté $AV(S)$, est égal à $\sum_{i \in N} |v_i \cap S|$, c'est-à-dire que l'on définit la *similarité* entre S et P comme le nombre de candidats de S approuvés par les votants de P. Cette procédure est une extension naturelle du vote par approbation à vainqueur unique. De plus, ce score est *additif*, c'est-à-dire que le score d'un comité est égal à la somme des scores des candidats qui le composent (vus comme des comités singletons) ; le vainqueur est donc facile à calculer. Cependant, cette procédure a tendance à élire des comités de grande taille.

Approbation nette Cette procédure, très proche de l'approbation simple, a été proposée dans le but de corriger la tendance de cette dernière à élire des comités de grande taille. La similarité entre un comité S et un vote v_i est définie comme le nombre de candidats de S approuvés par i moins le nombre de candidats de S que i n'approuve pas. La similarité totale pour S, noté $NAV(S)$, est alors égale $\sum_{i \in N} |v_i \cap S| - |v_i^c \cap S|$, où v_i^c désigne le vote complémentaire de v_i. De même que l'approbation simple, cette règle est additive et demande donc peut d'effort de calcul pour déterminer le vainqueur.

Satisfaction Proposée par Brams et Kilgour (2014), cette méthode varie par rapport aux deux premières par sa définition de la similarité entre un vote et un comité. Pour tout couple votant-comité, on calcule un *score de satisfaction*, $SAV(S, i) = \frac{|v_i \cap S|}{|v_i|}$. Ce score représente la fraction de candidats approuvés par le votant i qui sont présents dans le comité S. Le score d'un comité est défini par $SAV(S) = \sum_{i \in N} \frac{|v_i \cap S|}{|v_i|}$. Le comité élu est le comité maximisant le score de satisfaction. De plus, puisque le score de satisfaction est additif, il est facile de calculer le comité vainqueur. Selon Brams et Kilgour, cette procédure aurait tendance à encourager le "bullet voting", c'est-à-dire le vote pour un candidat unique. De plus, dans le cas où la taille du comité n'est pas fixée, elle favorise l'élection de comités de grande taille.

Satisfaction nette De manière similaire à l'approbation nette, le but de cette méthode est de corriger la tendance de la procédure par satisfaction à élire des comités de grande taille. Le score est défini par $NSAV(S) = SAV^+(S) - SAV^-(S)$, où $SAV^+(S) = \sum_{i \in N} \frac{|v_i \cap S|}{|v_i|}$ et $SAV^-(S) = \sum_{i \in N} \frac{|v_i^c \cap S|}{|v_i^c|}$. De même, le score $NSAV(s)$ est additif, le comité vainqueur est donc facile à calculer.

Approbation proportionnelle Le but de ce système, proposé par Simmons (2001), est de répondre au besoin de *proportionnalité* des élections à vainqueurs multiples, qui n'est pas pris en compte par les méthodes précédentes. Dans cette méthode, le score d'un comité est défini par $PAV(S) = \sum_{i \in N} r(|v_i \cap S|)$, où $r(k) = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/k$. Ainsi, la satisfaction gagnée par un votant grâce à l'ajout d'un candidat qu'il approuve dans le comité décroît à chaque candidat ajouté. Cependant le calcul du comité vainqueur a été démontré NP-difficile par Aziz et al. (2015). De plus, cette procédure possède une tendance à élire des comités de grande taille. Il est possible de définir l'approbation proportionnel nette, de façon similaire à la satisfaction nette.

Approbation proportionnelle séquentielle Cette procédure, proposée par Thorvald Thiele à la fin du XIX^e siècle, est seulement applicable dans le cas où la taille du comité est fixée. Les candidats sont élus de façon séquentielle. Initialement, la valeur de l'approbation d'un votant est fixée à 1. À chaque tour, le candidat non élu qui possède le plus grand score d'approbation est élu. Puis, on fixe la nouvelle valeur de l'approbation de chaque votant i à $\frac{1}{(1+k)}$ où k désigne le nombre de candidats approuvés par i et qui sont déjà élus. Ainsi de suite, jusqu'à ce que le nombre désiré de candidats soit élu.

Illustrons ces règles à l'aide d'un exemple.

Exemple 2.6. *Considérons cinq votants, trois candidats et le profil d'approbations suivant :*

$$\begin{array}{rl} P_1: & (101) \\ P_2: & (001) \\ P_3: & (011) \\ P_4: & (111) \\ P_5: & (010) \end{array}$$

Pour chaque comité S, nous calculons les scores $AV(S)$, $NAV(S)$, $SAV(S)$, $NSAV(S)$ et $PAV(S)$.

S	$AV(S)$	$NAV(S)$	$SAV(S)$	$NSAV(S)$	$PAV(S)$
(000)	0	0	0	0	0
(001)	4	3	7/3	11/6	4
(010)	3	1	11/6	1/3	3
(011)	7	4	25/6	13/6	6
(100)	2	−1	2/3	−4/3	2
(101)	6	2	19/6	5/3	5
(110)	3	−2	5/2	−1	9/2
(111)	9	3	29/6	2/3	41/6

Détaillons le calcul des scores du comité (101).

$$\begin{array}{rcl} AV(101) & = & 2+1+1+2+0 \\ NAV(101) & = & (2-0)+(1-1)+(1-1)+(2-0)+(0-2) \\ SAV(101) & = & 1+1+1/2+2/3+0 \\ NSAV(101) & = & (1-0)+(1-1/2)+(1/2-1)+(2/3-0)+(0-1) \\ PAV(101) & = & 3/2+1+1+3/2+0 \end{array}$$

Ainsi, le comité vainqueur de la règle de l'approbation simple est (111) *tandis que celui de l'approbation nette est* (011). *De même le comité vainqueur de la règle de satisfaction est* (111) *tandis que celui de la règle de satisfaction nette est* (011). *Enfin le comité vainqueur de l'approbation proportionnelle est* (111).

2.3.4.b Procédures à seuil

Cette classe de procédures a été proposée par Fishburn et Pekec (2004). On considère dans cette classe qu'un comité représente un votant i s'il contient assez de candidats approuvés par i, sinon il ne le représente pas. Le comité vainqueur est celui qui représente le plus de votants. Le *score de représentation* est donc un score binaire, il ne permet pas de mesurer à quel point un votant est représenté par un comité.

Les procédures de cette classe se définissent de la manière suivante. On définit une fonction de seuil $t : 2^X \to \mathbb{R}^+$, qui associe à chaque comité S, un réel $t(S)$. Étant donné un comité S, on considère que S représente un votant i si S contient au moins $t(S)$ candidats approuvés par i. La règle d'approbation fondée sur la fonction de seuil t est la règle qui renvoie un comité maximisant le nombre de votants qu'il représente, c'est-à-dire, maximisant $|\{i : |v_i \cap S| \geq t(S)\}|$.

Pour qu'une règle d'approbation fondée sur une fonction de seuil t soit *neutre*, il est nécessaire que t soit cardinal, ce qui signifie que $t(S)$ ne doit dépendre que de la taille de S. Remarquons que la condition pour que S soit représentatif ne dépend que de S et est donc la même pour chaque votant.

Donnons quelques exemples de cette famille de règles :

Règle à seuil constant Dans ce cas, t est une constante. Ce choix peut convenir à l'élection d'un comité de taille fixée.

Règle à seuil croissant Deux exemples évidents de seuils croissants sont le seuil majoritaire $t(S) = \frac{|S|}{2}$ et le seuil majoritaire strict $t(S) = \frac{|S|+1}{2}$.

D'après Kilgour (2010), les règles à seuil sont NP-difficiles à calculer, mais demandent en général un temps de calcul raisonnable si le nombre de candidats est petit.

Considérons un exemple afin d'illustrer la catégorie des règles à seuil.

Exemple 2.7. *Considérons cinq votants et trois candidats. Le profil d'approbations est le même que dans l'exemple précédent :*

$$\begin{array}{ll} P_1 : & (101) \\ P_2 : & (001) \\ P_3 : & (011) \\ P_4 : & (111) \\ P_5 : & (010) \end{array}$$

Nous considérons la règle à seuil constant égal à 2 et la règle à seuil majoritaire. Pour chaque comité S, nous calculons le nombre de votants qu'il représente avec les deux règles *considérées, noté* S_2 *et* S_{maj}.

S	S_2	S_{maj}
(000)	0	0
(001)	0	4
(010)	0	3
(011)	2	4
(100)	0	2
(101)	2	4
(110)	1	3
(111)	3	3

Ainsi, le comité vainqueur de la règle à seuil constant est (111) *tandis qu'il existe trois comités ex aequo pour la règle à seuil majoritaire, qui sont* (001), (011) *et* (101).

2.3.4.c Procédures de centralisation

Cette dernière classe de procédures, que nous retrouverons dans le chapitre 3, a été proposée par Brams et al. (2007b). Elle se fonde sur la remarque que tout sous-ensemble de candidats peut être représenté sous la forme d'un vecteur binaire de taille m, en tant que vecteur de l'hypercube de X. On définit la distance entre deux sous-ensembles de candidats S et T comme étant égale à la *distance de Hamming* : $d_{\mathcal{H}}(S,T) = |(S \cap \bar{T}) \cup (\bar{S} \cap T)|$. En d'autres termes, la distance de Hamming entre S et T représente le nombre de candidats qui se trouvent dans l'un des ensembles mais pas dans l'autre. Les méthodes de centralisation cherchent à déterminer quel est le comité le plus proche de l'ensemble des votes. Présentons les deux règles principales de cette classe et leurs variantes :

Minisum Dans cette méthode, introduite par Brams et al. (2007b), on mesure la distance d'un comité à un profil par la *somme* des distances de Hamming de ce comité à chacun des votes du profil. Le comité vainqueur est le comité minimisant cette somme. Cette méthode est en fait équivalente à la première procédure de scores citée, l'*approbation simple*. Celle-ci consiste à choisir les candidats selon leurs scores d'approbation. Le score d'approbation d'un candidat est égal au nombre de votants qui approuvent ce candidat. Dans le cas où le comité doit être de taille k, les candidats avec les k plus grands scores d'approbations sont élus. Dans le cas où il n'existe pas de contrainte sur la taille du comité, les candidats approuvés par une majorité de votants sont élus. Il est donc simple de déterminer le comité vainqueur de cette règle. Cependant, cette procédure ne prend pas en compte des notions comme la proportionnalité. De plus, comme il est montré par Brams et al. (2007a), elle peut être extrêmement injuste envers certains votants. En effet, avec un électorat composé de deux groupes aux opinions totalement opposées, cette méthode choisit le comité du groupe le plus nombreux.

Minimax Pour corriger les défauts de minisum, Brams et al. (2007a) définissent *minimax*. Cette procédure calcule la distance d'un comité à un profil par le *maximum* des distances de Hamming de ce comité aux votes du profil. Le comité vainqueur de cette procédure est celui qui minimise cette distance, c'est-à-dire, celui qui minimise le maximum de la distance de Hamming à l'ensemble des votes. La règle *minimax* est par définition plus équitable (au sens rawlsien du terme, c'est-à-dire plus *égalitaire*) que la méthode habituelle, puisqu'elle minimise le désaccord avec le votant le moins satisfait. Mais cela entraîne une forte sensibilité aux votants extrêmes que l'on peut illustrer avec l'exemple suivant. Imaginons un profil de 100 votants où 99 votants sont d'accord sur le comité à élire et le dernier votant vote pour un comité totalement différent. Minimax choisira un comité qui se trouve à égale distance (au sens de la distance de Hamming) entre ces deux comités et accorde ainsi le même poids aux 99 votants qu'au votant extrême. De plus, il est difficile de calculer un vainqueur pour cette procédure.

Minisum et minimax pondérées Kilgour et al. (2006) ont proposé des variantes de ces procédures en pondérant les votes, pour les rendre moins sensibles aux votes extrêmes. Étant donné un vote, on lui associe un poids, par exemple le nombre de votants ayant choisi ce vote. Pour minisum pondérée, le score d'un comité est alors égal à la somme pondérée des distances de Hamming des votes au comité ; le comité élu est celui qui minimise ce score. Pour minimax pondérée, le score d'un comité est égal au maximum des distances de Hamming pondérées des votes au comité ; de même le comité élu est le comité minimisant ce score.

Considérons un exemple afin d'illustrer ces deux règles.

Exemple 2.8. *Nous considérons cinq votants et trois candidats. Le profil d'approbations est le suivant :*

$$\begin{array}{rl} P_1: & (101) \\ P_2: & (001) \\ P_3: & (011) \\ P_4: & (111) \\ P_5: & (010) \end{array}$$

Le tableau suivant résume les distances de Hamming, le score minisum et le score minimax de l'ensemble des comités.

$d_{\mathcal{H}}(c, v_i)$	1	2	3	4	5	*sum*	*max*
000	2	1	2	3	1	9	3
001	1	0	1	2	2	6	2
010	3	2	1	2	0	8	3
011	2	1	0	1	1	5	2
100	1	2	3	2	2	10	3
101	0	1	2	1	3	7	3
110	2	3	2	1	2	10	3
111	1	2	1	0	2	7	2

Le comité vainqueur pour minisum est (011)*, tandis que les comités ex aequo pour minimax sont* (001)*,* (011) *et* (111)*.*

Dans le chapitre 3, nous généraliserons ces deux règles en proposant une famille générale de règles de vote à vainqueurs multiples fondées sur le vote par approbation.
Remarquons enfin que l'équivalence, mentionnée en section 2.2.3, entre n'approuver aucun candidat et approuver tous les candidats existe toujours pour la règle minisum si la taille du comité est fixée. Cependant cette équivalence n'est plus vraie pour la règle minimax, ni pour la règle minisum si la taille du comité n'est pas fixée.

2.3.5 Départage des ex aequo

De même qu'en section 2.2, il peut exister des situations d'égalité entre comités. De façon similaire, nous définissons les règles à vainqueurs multiples irrésolues et résolues. Les premières renvoient un ensemble de *comités ex aequo*, les secondes renvoient le comité vainqueur de l'élection. On peut obtenir une règle résolue en adjoignant un mécanisme de départage des ex aequo à une règle irrésolue. Le mécanisme de départage est généralement un ordre de priorité sur les comités, afin conserver l'anonymat de la règle initiale. De plus, il est possible de maintenir la neutralité par rapport aux candidats à l'aide d'un mécanisme fondé sur la cardinalité des comités ex aequo.

2.3.6 Propriétés axiomatiques

Certaines des propriétés étudiées en section 2.2.5 s'étendent naturellement aux élections à vainqueurs multiples, comme l'anonymat ou la neutralité. Citons quelques exemples de ce type de propriétés provenant de Elkind et al. (2014), énoncés pour l'élection d'un nombre fixé de candidats, k, à l'aide d'une règle r irrésolue :

Non imposition r est dite non imposée si pour tout ensemble de candidats X, pour tout entier k et pour tout comité $S \subseteq X$, il existe un profil P tel que $r(P) = S$.

Unanimité r vérifie l'unanimité si pour tout entier k et pour profil P, si chaque votant possède le même ensemble S de k candidats préférés, alors (1) $S = r(P, k)$ (unanimité forte) ou (2) $S \in r(P, k)$ (unanimité faible).

Consistance r est consistante si pour tout entier k et pour toute paire de profils P_1, P_2 telle que $r(P_1, k) \cap r(P_2, k) \neq \emptyset$, alors $r(P_1 \cup P_2, k) = r(P_1, k) \cap r(P_2, k)$.

Homogénéité r est homogène si pour tout couple d'entiers (k, n) non nuls et pour tout profil P, $r(nP, k) = r(P, k)$, où nP représente le profil constitué de n copies de P.

Monotonie au niveau des candidats r est dite monotone au niveau des candidats si pour tout profil P, pour tout candidat x et tout entier k, si $x \in S$ tel que $S \in r(P)$, alors pour tout profil P' obtenu en améliorant le classement de x d'une place dans un vote $v \in P$, on a $x \in S'$ tel que $S' \in r(P')$.

Les enjeux liés aux règles à vainqueurs multiples ne sont pas les mêmes que ceux liés aux règles à vainqueur unique. Des propriétés spécifiques aux règles à vainqueurs multiples ont été proposées pour capturer ces enjeux. Par exemple, la propriété de monotonie au niveau des comités s'intéresse au changement de taille des comités. Intuitivement, elle requiert que lorsque la taille du comité est augmentée, aucun candidat élu précédemment ne soit éliminé.

Monotonie au niveau des comités r est dite monotone pour les comités si pour tout profil P, on a : (1) pour tout k, si $S \in r(P, k)$ alors il existe $S' \in r(P, k+1)$ tel que $S \subseteq S'$; (2) pour tout k, si $S \in r(P, k+1)$ alors il existe $S' \in r(P, k)$ tel que $S' \subseteq S$.

Certaines de ces propriétés sont spécifiques aux méthodes de vote basées sur des préférences ordinales, comme la monotonie au niveau des candidats. Dans le chapitre 4, nous adapterons en partie ces propriétés pour le vote par approbation.

2.4 Complexité de calcul des règles de vote

Nous supposons connues quelques notions courantes de la théorie de la complexité (en particulier les classes de complexité en temps comme NP et la hiérarchie polynomiale).

Les théoriciens classiques du vote ne se sont pas intéressés aux problèmes algorithmiques de la détermination d'un vainqueur. Il est vrai qu'une grande partie des règles de vote usuelles se calculent en temps polynomial. C'est seulement lorsque la règle de *Kemeny* a été démontrée difficile à calculer que ce problème est devenu critique. En effet, personne ne peut accepter une règle de vote qui nécessite des années de calcul pour déterminer le vainqueur.
La règle de Kemeny est la première règle d'agrégation dont on a montré la difficulté de calcul. Elle a été définie par Kemeny (1959) puis axiomatisée par Young et Levenglick (1978), avant d'être démontrée difficile à calculer par Bartholdi III et al. (1989a), et indépendamment par Hudry (1989). Le calcul d'un vainqueur pour cette règle a été démontré Θ_2^p-complet par Rothe et al. (2003). Á la suite de ce résultat, des heuristiques ont été proposées par Davenport et Kalagnanam (2004) et Conitzer et al. (2006) pour calculer le résultat exact d'une élection sous la règle de Kemeny, et Ailon et al. (2008) ont conçu un algorithme d'approximation.

Depuis, de nombreuses règles de vote ont été montrées difficiles à calculer, comme la règle proposée par Charles Dodgson au courant du XIX^{e}, montrée difficile à calculer par Bartholdi III et al. (1989a). Une caractérisation exacte de la complexité de ce problème par Hemaspaandra et al. (1997) montre qu'il est complet pour la classe Θ_2^p. Puis Rothe et al. (2003) ont montré que le problème de détermination d'un vainqueur pour la règle de Young (1977) est de même complet pour Θ_2^p. Comme cela est souvent le cas pour les problèmes difficiles, on a tenté de trouver des *approximations* polynomiales, avec réussite pour la règle de Dodgson, tandis que la règle de Young a été démontrée inapproximable, deux résultats par Procaccia et al. (2007).

Dans le cadre des élections à vainqueurs multiples, deux exemples de règles difficiles à calculer sont les règles de Monroe (1995) et de Chamberlin et Courant (1983). Ces deux règles ont été montrées NP-difficiles par Procaccia et al. (2008b), mais remarquons qu'elles deviennent faciles lorsque le nombre de candidats à élire est constant. Plus récemment, Betzler et al. (2013) ont montré que deux variantes intuitives de Monroe et de Chamberlin et Courant sont aussi NP-difficiles.

Le vote par approbation à vainqueurs multiples a conduit à de nombreuses procédures de vote dont la complexité a été étudiée. Les règles fondées sur des scores additifs sont faciles à calculer, c'est-à-dire, que le temps de calcul nécessaire à la détermination d'un vainqueur est polynomial. Les procédures qui rentrent dans ce cadre sont nombreuses, par exemple, l'approbation simple, l'approbation nette, la satisfaction ou encore la satisfaction nette. La règle d'approbation proportionnelle, fondée sur un score qui n'est pas additif, a été montrée difficile à calculer par Aziz et al. (2015).
Selon Fishburn et Pekec (2004), le calcul du comité vainqueur pour les procédures à seuil est NP-complet. Néanmoins, ils précisent qu'avec un petit nombre de candidats, les efforts computationnels ne sont pas élevés.
Enfin, pour la procédure de centralisation minisum, le vainqueur est facile à calculer puisque cette règle est équivalente à l'approbation simple. La règle minimax a été montrée difficile à calculer puisque équivalente au problème de chaîne binaire la plus proche (*closest binary string*) en théorie des codes par Frances et Litman (1997) et Li et al. (1999).

2.5 Manipulation

2.5.1 Dans les règles de vote à vainqueur unique

Il évident que le bulletin de vote fourni par un votant ne représente pas nécessairement ses *préférences sincères*. Certains votants peuvent être tentés d'agir *stratégiquement* en ne reportant pas leurs préférences sincères, dans le but d'améliorer le résultat de l'élection. Ce phénomène est appelé *manipulation*. Une règle de vote est dite *résistante à la manipulation* si, pour tout profil, elle ne permet à aucun votant de manipuler le résultat en sa faveur, même en ayant connaissance de toutes les préférences du profil. Cette définition de la manipulation est une définition dans le pire cas, c'est-à-dire, que l'on ne souhaite pas qu'une règle soit manipulable même si le manipulateur possède toutes les informations disponibles. Plus formellement :

Définition 2.1. *Soit r une règle de vote résolue et P un profil de préférences. r est dit résistante à la manipulation si pour tout profil P et pour tout votant i, $r(P) \succeq_i r(P \cup \{P'_i\} \backslash \{P_i\})$, où $(P \cup \{P'_i\} \backslash \{P_i\})$ représente le profil P dans lequel la relation de préférence sincère P_i de i est remplacée par une autre P'_i.*

Depuis le théorème de Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975) (retranscrit dans le théorème 1), nous savons qu'il n'existe qu'une règle de vote résolue, fondée sur des préférences ordinales, résistante à la manipulation selon cette définition, la règle *dictatoriale*. La règle dictatoriale est telle qu'il existe un votant $d \in N$ tel que pour tout profil P, $r(P) = P_d$. Comme son nom l'indique, cette règle simule la situation où un dictateur choisit systématiquement l'issue du vote.

Théorème 1. *Soit r une règle de vote résolue et surjective*[1]. *Si r est résistante à la manipulation alors r est dictatoriale.*

La conclusion de ce théorème est qu'il n'existe pas de règles de vote raisonnable et résistante à la manipulation. Cependant, ce théorème (ainsi que cette définition de la manipulation) s'appuie sur plusieurs hypothèses dont celle des préférences ordinales. Ainsi, certaines règles, dont les règles fondées sur le vote par approbation, peuvent potentiellement échapper à ce résultat d'impossibilité.

2.5.1.a Dans le vote par approbation

Dans le cas du vote par approbation, la définition d'un vote sincère n'est pas évidente et dépend de l'hypothèse sur la nature des préférences. Selon Brams et Fishburn (1983), un vote sincère est un vote qui "[...] reflète directement les préférences sincères des votants, c'est-à-dire, qui ne nous trompe pas sur les préférences". Ils en déduisent alors que, dans le cadre de préférences ordinales, un vote par approbation sincère est tel que si un candidat est approuvé alors tout candidat qu'il lui est préféré est aussi approuvé.

Étant donné des préférences ordinales, il existe donc pour un votant, plusieurs manières sincères de voter : n'approuver aucun candidat, seulement son candidat préféré, ses deux candidats préférés, et ainsi de suite. Remarquons que cela revient à choisir un candidat seuil et à approuver tout candidat préféré à ce seuil et aucun autre candidat. Un votant sincère a donc le choix entre plusieurs votes sincères. Ainsi un votant même sincère doit décider de quelle manière il vote, ce qui est la définition d'un comportement stratégique. Cela illustre la notion de *vote stratégique sincère*. Le vote par approbation est sensible au vote stratégique sincère, c'est-à-dire qu'en remplaçant son vote par un autre vote sincère, un votant peut changer et améliorer le résultat de l'élection.

Dans le cas des préférences dichotomiques, les votants ne possèdent qu'un seul vote sincère puisque les candidats sont naturellement séparés en deux groupes. Brams et Fishburn (1983) ont montré que le vote par approbation est résistant à la manipulation dans ce cadre précis. Cela signifie que la meilleure façon de voter est de voter sincèrement, indépendamment du reste des votes.

De même, Endriss (2013a) a montré que le vote par approbation est résistant à la manipulation si l'on considère d'autres hypothèses sur les préférences des votants, à savoir le remplacement et la suppression.

1. Une règle de vote est dite surjective si, pour tout candidat, il existe un profil de vote qui élit ce candidat. Plus précisément, il est seulement nécessaire dans ce théorème que la règle de vote puisse aboutir à au moins trois issues différentes.

Le vote par approbation à vainqueur unique est donc partiellement résistant à la manipulation, en fonction de l'hypothèse retenue sur la nature des préférences.

2.5.1.b Extension des préférences pour les règles irrésolues

Une seconde hypothèse sur laquelle se fonde le théorème de Gibbard et Satterthwaite est l'hypothèse que la règle considérée est résolue. Cette hypothèse a été remise en question par Gärdenfors (1976), Kelly (1977) et Fishburn (1972) qui ont étudié la manipulation des règles irrésolues. Cependant l'étude de la manipulation des règles irrésolues a pour difficulté principale la comparaison d'ensembles de candidats ex aequo entre eux. La question qui se pose est la suivante : comment les préférences sur des ensembles de candidats sont-elles liées aux préférences sur les candidats eux-mêmes. Pour ce faire, Gärdenfors, Kelly et Fishburn ont proposé des *principes d'extensions* pour étendre les préférences sur des candidats aux préférences sur des ensembles de candidats. Soient A et B deux sous-ensembles non-vides de X et $\succ_i$ la relation de préférence de i sur X. Un principe d'extension E transforme $\succ$ sur X en une relation de préférence $\succ^E$ sur $2^X \setminus \emptyset$. [2]

Présentons les principes d'extensions les plus utilisés :

Principe d'extension optimiste $A \succ_i^O B$ si et seulement si $\forall b \in B, \exists a \in A$ tel que $a \succ_i b$, ou, en d'autres termes, si le meilleur des éléments de A (selon la préférence du votant) est préféré au meilleur des éléments de B.

Principe d'extension pessimiste $A \succ_i^P B$ si et seulement si $\forall a \in A, \exists b \in B$ tel que $a \succ_i b$, ou, en d'autres termes, si le pire des éléments de A (selon la préférence du votant) est préféré au pire des éléments de B.

Principe d'extension de Kelly (1977) $A \succ_i^K B$ si et seulement si $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, on a $a \succ_i b$.

Principe d'extension de Fishburn (1972) $A \succ_i^F B$ si et seulement si $\forall a \in A \setminus B$, $\forall b \in A \cap B$ et $\forall c \in B \setminus A$, on a $a \succ_i b$, $a \succ_i c$ et $b \succ_i c$.

Principe d'extension de Gärdenfors (1976) $A \succ_i^G B$ si et seulement si (a) $A \subseteq B$ et $\forall a \in A$, $\forall b \in B \setminus A$, on a $a \succ_i b$, ou (b) $A \supseteq B$ et $\forall a \in A \setminus B$, $\forall b \in B$, on a $a \succ_i b$, ou (c) $\forall a \in A \setminus B$ et $\forall b \in B \setminus A$, on a $a \succ_i b$.

Illustrons ces principes d'extension à l'aide d'un exemple.

Exemple 2.9. *Considérons quatre candidats et le vote ordinal suivant :*

$$P_1 : x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$$

2. Pour une discussion sur les principes d'extension en choix social, voir les travaux de Barberà (2010) et de Brandt et Brill (2011).

Commençons par utiliser le principe d'extension optimiste et pessimiste pour comparer les deux sous-ensembles de candidats $\{x_1, x_4\}$ *et* $\{x_2, x_3\}$. *Par définition, on obtient* $\{x_1, x_4\} \succ_1^O \{x_2, x_3\}$ *car le meilleur choix de* $\{x_1, x_4\}$ *est préféré au meilleur choix de* $\{x_2, x_3\}$. *En revanche, on a* $\{x_2, x_3\} \succ_1^P \{x_1, x_4\}$ *car le pire choix de* $\{x_1, x_4\}$ *est préféré au pire choix de* $\{x_2, x_3\}$.

Maintenant, appliquons le principe d'extension de Kelly pour comparer $\{x_1\}$ *et* $\{x_2, x_3\}$. *Puisque chaque élément de* $\{x_1\}$ *est préféré à chaque élément de* $\{x_2, x_3\}$, *on obtient* $\{x_1\} \succ_1^K \{x_2, x_3\}$. *Ce principe d'extension est le plus fort des trois derniers principes. Ainsi,* $\{x_1\} \succ_1^K \{x_2, x_3\}$ *implique* $\{x_1\} \succ_1^F \{x_2, x_3\}$ *et* $\{x_1\} \succ_1^G \{x_2, x_3\}$.

Comparons maintenant les sous-ensembles $\{x_1, x_2, x_3\}$ *et* $\{x_2, x_3, x_4\}$. *On remarque que ces deux sous-ensembles sont incomparables avec le principe de Kelly. Cependant, le principe de Fishburn s'applique et on obtient* $\{x_1, x_2, x_3\} \succ_1^F \{x_2, x_3, x_4\}$.

Enfin, comparons les sous-ensembles $\{x_1, x_2\}$ *et* $\{x_1, x_3\}$. *Les principes de Kelly et de Fishburn ne permettent pas de comparer ces deux sous-ensembles. Avec le principe de Gärdenfors, nous obtenons* $\{x_1, x_2\} \succ_1^G \{x_1, x_3\}$.

Pour un principe d'extension E, un profil P et une règle irrésolue r, une manipulation de r par un votant i au sens de E est un bulletin P_i' tel que $r(P \backslash \{P_i\} \cup \{P_i'\}) \succ_i^E r(P)$. Une règle irrésolue r est manipulable au sens de E s'il existe un profil P pour lequel il existe une manipulation par un votant i au sens de E. Une règle manipulable au sens du principe d'extension E est dite P^E*-manipulable*.

Commençons par le principe d'extension le plus fort, celui de Kelly. Tout d'abord, Taylor (2005) a montré qu'entre autres, les règles de pluralité et certaines règles faiblement Condorcet cohérentes sont P^K-manipulables. Confortant ces résultats, Brandt (2010) a montré qu'aucune règle Condorcet cohérente n'est résistante à la P^K-manipulation. De plus, il a donné une condition suffisante pour qu'une règle soit résistante à la P^K-manipulation, il s'agit de la monotonie d'ensemble. La monotonie d'ensemble assure que le choix d'un ensemble de candidats ne soit pas modifié si les préférences sur les candidats qui ne sont pas choisis sont affaiblies. Alors, toute règle irrésolue vérifiant la monotonie d'ensemble est résistante à la P^K-manipulation. Deux règles qui vérifient cette propriété sont la règle de Pareto qui retourne l'ensemble des candidats non Pareto dominés, et la règle de l'omninomination, qui retourne l'ensemble des candidats classés en première position par au moins un votant. Ces deux règles sont donc résistantes à la P^K-manipulation. De plus, Brandt (2010) a montré que cette condition est aussi nécessaire pour la résistance à la P^K-manipulation des règles à comparaison par paire. Ceci a permis de montrer que certaines règles comme les règles de Borda, de Copeland, de Kemeny et de Banks ne sont pas résistantes à la P^K-manipulation puisqu'elles ne vérifient pas la monotonie d'ensemble.

Pour les principes d'extensions de Fishburn et de Gärdenfors, Gärdenfors (1976) a étudié les règles de Condorcet et la règle de l'omninomination et a montré que ces deux règles sont résistantes à la P^G-manipulation. Puis Brandt et Brill (2011) ont proposé des conditions nécessaires et suffisantes pour la résistance à la P^F-manipulation et à la P^G-

manipulation. Ces résultats ont conduit à montrer que les règles de Condorcet, de l'omninomination, de Pareto [3] et de Condorcet-Pareto sont résistantes à la P^F-manipulation. De même, la règle de Top cycle, qui retourne l'élément maximal de la fermeture transitive du graphe de majorité, a été montrée résistante à la P^F-manipulation [4] et à la P^G-manipulation.

2.5.2 Dans les règles de vote à vainqueurs multiples

La plupart des règles de vote à vainqueurs multiples se fondent sur les préférences des votants sur les candidats, et non sur les comités. La difficulté principale, dans l'étude de leur manipulation, est donc de savoir si pour un votant, un comité est préféré à un autre comité. Cette information ne figure pas dans les données des élections à vainqueurs multiples. En général, il est fait l'hypothèse que le manipulateur possède une fonction d'utilité sur les comités. Une manipulation est alors réussie si elle conduit à l'élection d'un comité dont l'utilité est supérieure à celle du comité précédent.

Le théorème de Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975) ne s'applique pas aux règles à vainqueurs multiples. Cependant, le fait d'avoir plusieurs candidats vainqueurs introduit des *dépendances* dans les préférences. Considérons par exemple la situation suivante : deux candidats x, y et n votants. Le votant 1 préfère x à y, mais ce votant sait que ces deux candidats ne s'apprécient pas mutuellement et il ne souhaite donc pas les voir tous les deux élus. De plus, il sait que y possède assez de soutien pour être élu et que x ne sera pas élu sans son vote. Ainsi le votant 1 aurait avantage à ne pas supporter le candidat x pour ne pas se retrouver dans la situation où les deux candidats sont élus. Ce type de manipulation paraît inévitable à moins de restreindre les préférences des votants de façon à limiter les interactions entre les alternatives.

Une manière de restreindre ces préférences est de considérer des *préférences séparables*. Les préférences séparables sont telles qu'il n'existe pas de dépendances préférentielles entre les candidats. Cela signifie que les préférences sur un candidat ne dépendent pas des préférences sur les autres candidats. Prenons deux exemples de préférences séparables et non séparables. Considérons une élection de comité avec 3 candidats $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Supposons qu'un votant possède les préférences suivantes :

$$(100) \succ (110) \succ (101) \succ (111) \succ (000) \succ (010) \succ (001) \succ (011)$$

Dans ce cas les préférences du votant sont séparables ($x_1 \succ \bar{x_1}$, $\bar{x_2} \succ x_2$ et $\bar{x_2} \succ x_2$). Il n'existe donc pas de dépendance entre les variables. Maintenant supposons que les préférences du votant soient les suivantes :

$$(110) \succ (100) \succ (111) \succ (101) \succ (000) \succ (010) \succ (001) \succ (011)$$

Dans ce cas les préférences du votant ne sont pas séparables. En effet, on s'aperçoit que lorsque le candidat x_1 est dans le comité, le votant préfère que x_2 y soit aussi ((110) $\succ$ (100)

3. Ce résultat avait été démontré auparavant par Feldman (1979).
4. Sanver et Zwicker (2012) ont aussi découvert ce résultat de façon indépendante.

et $(111) \succ (101)$), mais lorsque le candidat x_1 n'est pas dans le comité, alors le votant préfère que x_2 n'y soit pas non plus ($(000) \succ (010)$ et $(001) \succ (011)$). Ainsi, les préférences sur le candidat x_2 sont conditionnées par les préférences sur le candidat x_1. À l'aide de cette hypothèse, Barbera et al. (1991) ont montré qu'il existe toute une classe de règles de vote résistantes à la manipulation, qu'ils appellent les élections par comités. Mais cette hypothèse n'est pas toujours réalisée en pratique.

Un autre travail significatif sur la manipulation des élections à vainqueurs multiples est celui de Slinko et White (2010) qui ont étudié la manipulation dans les systèmes à représentation proportionnelle. En distinguant deux types de comportement stratégique chez les votants, les premiers cherchant à maximiser le nombre de sièges du parti, les seconds cherchant à maximiser le pouvoir, ils ont étudié la manipulation des systèmes à représentation proportionnelle en fonction de la présence ou non de seuil (seuil minimal pour obtenir des sièges).

2.5.2.a Dans le vote par approbation

Dans le cadre du vote par approbation à vainqueurs multiples, une difficulté supplémentaire est que pour savoir si un vote est une manipulation, il faut connaître les préférences des votants sur tous les comités. Or, encore une fois, cette information ne figure pas dans les données du problème. Il sera donc nécessaire de faire une hypothèse permettant d'étendre les préférences des votants à l'ensemble des comités. L'hypothèse classique, et celle que nous utiliserons en section 3.4, est que plus la distance de Hamming d'un comité au comité optimal du votant est faible, plus le votant apprécie ce comité. De telles préférences sont dites *Hamming-cohérentes*. Cela ne dit rien sur les préférences d'un votant i entre deux comités à égale distance de Hamming de v_i, mais nous n'en aurons jamais besoin dans cette thèse. En fait, dans de nombreux cas, il suffira d'une hypothèse plus faible sur les préferences des votants, à savoir que le votant i a un unique comité préféré.

Exemple 2.10. *Considérons trois candidats et le vote par approbation suivant :*

$$P_1 : (101)$$

L'hypothèse de préférences Hamming-cohérentes nous permet de compléter ce vote pour obtenir un pré-ordre sur l'ensemble des comités. Entre autres, nous pouvons conclure que $101 \succ_1 100$, $001 \succ_1 011$ *et* $100 \succ_1 010$.

En section 2.3.4, nous avons attiré l'attention du lecteur sur deux règles majeures du vote par approbation à vainqueurs multiples, les règles nommées minisum et minimax. D'après Brams et al. (2007a), nous savons que *minimax* est manipulable et que *minisum* ne l'est pas. En section 3.4, nous étudierons le comportement stratégique pour une famille de règles généralisant ces deux règles.

2.5.2.b Extension des préférences pour les règles irrésolues

Dans le cas des règles irrésolues, l'idée est la même qu'en section 2.5.1.b. Il s'agit d'étendre les préférences des votants sur les comités aux préférences sur des ensembles de comités. Les principes d'extension de préférences pour les règles irrésolues à vainqueur unique sont aussi applicables dans ce cas. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-ensembles non-vides de 2^X, et $\succ_i$ la relation de préférence de i sur 2^X. Un principe d'extension E transforme $\succ$ sur 2^X en une relation de préférence $\succ^E$ sur $2^{2^X} \setminus \emptyset$. Par exemple, le principe d'extension optimiste devient :

Principe d'extension optimiste $\mathcal{A} \succ_i^O \mathcal{B}$ si et seulement si $\forall B \in \mathcal{B}, \exists A \in \mathcal{A}$ tel que $A \succ_i B$, ou, en d'autres termes, si le meilleur des éléments de $\mathcal{A}$ (selon la préférence du votant) est préféré au meilleur des éléments de $\mathcal{B}$.

2.6 Vainqueurs possibles et nécessaires

Dans cette section, nous nous intéresserons aux situations de vote avec des *préférences incomplètes*, présentées en détail dans Boutilier et Rosenschein (2016). Dans la plupart des systèmes de vote, les votants doivent fournir un classement complet des alternatives. Cependant dans de nombreuses situations comme la recherche de pages web, la recommandation de produit ou la planification de réunion, les votants ne peuvent pas fournir un classement complet pour plusieurs raisons. Par exemple, le nombre d'alternatives à considérer peut être très élevé et même posséder une *structure combinatoire*, ce qui peut entraîner un effort cognitif prohibitif. De plus, cela implique une grande quantité de communication pour collecter l'ensemble des votes. Or, cet effort peut être superflu dans des situations où une connaissance partielle des préférences peut permettre de conclure quant à l'issue du vote. Enfin, l'ensemble des alternatives peut être incertain ou évoluer de façon dynamique. Ceux sont ces situations qui poussent à l'étude précise de la quantité d'information et de communication nécessaire à la détermination du vainqueur dans les systèmes de vote.
En particulier nous étudierons les deux questions suivantes :

Vainqueur nécessaire Étant donné un candidat x, est-il vainqueur dans toutes les complétions possibles du profil ?

Vainqueur possible Étant donné un candidat x, est-il vainqueur dans au moins une complétion possible du profil ?

Ces deux problèmes sont les problèmes des vainqueurs possibles et nécessaires introduits par Konczak et Lang (2005), parmi d'autres questions relevant de l'élicitation des préférences. Leur étude est particulièrement justifiée dans les situations suivantes :

- Certains votants ont exprimé leurs préférences et d'autres ne sont pas encore exprimés. Le profil est alors composé d'ordres de préférences complets ou vides.

- Tous les votants ont exprimé leurs préférences sur un sous-ensemble de candidats. De nouveaux candidats sont introduits pour lesquels on ne connaît pas les préférences des votants.

- On autorise les votants à exprimer leurs préférences de façon incrémentale. Ils peuvent ainsi choisir de ne pas spécifier certaines comparaisons, parce qu'ils ne savent pas comparer deux candidats ou qu'ils ne souhaitent pas les comparer.

- Les préférences ont été exprimées à l'aide d'un langage de représentation compacte comme les CP-nets [5].

Dans chacun de ces cas, il peut être intéressant d'avoir une idée des issues possibles de l'élection sans avoir à attendre la complétion totale des préférences. En effet, on pourrait conclure que les préférences recueillies jusqu'à présent sont suffisantes pour désigner le vainqueur (*vainqueur nécessaire*). Si ce n'est pas le cas, nous pourrions calculer l'ensemble de candidats qui ont encore une chance de gagner (*vainqueur possible*) afin que les votants se concentrent sur ce sous-ensemble. De plus, comme cela est proposé dans Conitzer et Sandholm (2002), ces préférences incomplètes pourraient nous permettent de déduire les préférences à éliciter pour être en mesure de déterminer le vainqueur.

Les problèmes des vainqueurs possibles et nécessaires ont reçu un intérêt significatif. Par exemple, si le nombre de candidats est borné, alors le problème des vainqueurs possibles a été montré NP-complet pour la règle de Borda, de veto, de Copeland, de maximin, STV et la règle majoritaire à deux tours. Pour STV et la règle de majorité à deux tours, le problème des vainqueurs nécessaires a été montré coNP-complet. Ces différents résultats ont été énoncés par Xia et Conitzer (2008). De plus, les problèmes de vainqueurs de Condorcet possibles et nécessaires ont été définis par Konczak et Lang (2005), qui ont montré qu'ils peuvent être résolus en temps polynomial.

Ces différents résultats se fondent sur des préférences ordinales des votants. Dans le chapitre 5, nous introduirons les problèmes des vainqueurs nécessaires et possibles dans le cadre du vote par approbation.

2.7 Vote sur des domaines combinatoires

Traditionnellement, les règles de vote sont conçues pour agréger des préférences sur des ensembles de candidats, ou alternatives, de petite taille. Cependant certaines situations font intervenir un nombre d'alternatives significativement grand pour que cela devienne un enjeux important. Les situations suivantes en sont des exemples :

Référendum multiple Pratique courante outre-Atlantique, il s'agit de prendre une décision collective concernant plusieurs propositions binaires qui peuvent être inter-

5. On pourra consulter Boutilier et al. (2004) pour plus d'information sur l'utilisation des CP-nets dans la cadre de la représentation des préférences.

corrélées. L'issue de ce type de vote est un vecteur binaire représentant les mesures approuvées ou rejetées.

Élection de comités Le but est ici d'élire un sous-ensemble de candidats, un comité, de taille fixée ou non.

Ces deux premiers exemples sont particuliers puisqu'ils rentrent dans la catégorie des élections à vainqueurs multiples, présentées en section 2.3. Le lien entre ces situations est clair : dans les deux cas, il s'agit de choisir collectivement un vecteur de valeurs binaires, correspondant dans un cas à un comité, dans l'autre cas à un ensemble de propositions adoptées. On trouvera une discussion sur les relations entre ces deux problématiques par Lang et Xia (2016).

Plus généralement, nous considérerons dans cette section les situations où l'ensemble des alternatives possèdent une *structure combinatoire*. Un domaine combinatoire est un produit cartésien $D = D_1 \times \ldots \times D_i \times \ldots \times D_p$, où pour tout i, D_i est ensemble fini de valeurs pour une variable X_i. Le choix commun d'un groupe de votants est alors un vecteur $\overrightarrow{d} \in (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in D$. Donnons un exemple typique :

Exemple 2.11. Choix d'un menu commun *Un ensemble d'agents doit prendre une décision sur un menu pour un dîner de gala (le traiteur sert un menu unique). Il faut choisir le plat, le dessert et la boisson : le plat peut être du lapin (l), de l'agneau (a) ou de la perche (p), la boisson, du vin rouge (r), du blanc (b) ou un soda (s), le dessert, une tarte au chocolat (t), un flanc (f) ou un crumble aux pommes (c). Le domaine de décision est un domaine combinatoire :* $D = \{l, a, p\} \times \{r, b, s\} \times \{t, f, c\}$.

Une première solution pourrait être de considérer ces domaines comme des domaines ordinaires et appliquer les règles usuelles. Rappelons que la plupart des règles de vote nécessitent un classement complet des alternatives par les votants. La nature combinatoire du domaine rend cette solution irréalisable puisqu'il est impossible pour un votant de fournir un classement complet sur un nombre exponentiel d'alternatives, même lorsque le nombre de valeurs est faible. Notre exemple du choix d'un menu commun ne présente qu'un nombre limité d'options mais conduit pourtant à 27 alternatives, ce qui est déjà difficile à classer pour un votant.

Comme cela est fait pour les référendums multiples, on pourrait aussi considérer chaque variable de manière indépendante, en organisant des *votes simultanés* pour chacune d'entre elles. Dans notre exemple, il s'agirait de choisir le plat, indépendamment du vin (et du dessert). On comprend alors quels problèmes peuvent surgir de cette méthode, l'issue du vote ne pourrait convenir à aucun votant. Dans notre exemple, imaginons qu'il y ait huit votants : trois votants souhaitent manger le lapin avec du vin rouge et une tarte au chocolat, (art), trois autres choisissent (pbf), un votant préfère (asc) et le dernier choisit (lbt). Par scrutin majoritaire sur chacune des variables, l'issue serait l'agneau accompagné de vin blanc et une tarte au chocolat, alors qu'aucun votant n'avait souhaité accompagner l'agneau de vin blanc. Pour éviter ce genre ce problème, il est nécessaire de faire l'hypothèse que les préférences des votants sont séparables, c'est-à-dire, que les préférences d'un votant sur une variable ne dépendent pas des préférences sur les autres variables. Cette hypothèse n'est pas réaliste en pratique. On le voit dans notre exemple où le choix du plat influe fortement sur le choix de la boisson, ou encore dans les référendums multiples où des questions sur le budget et sur les impôts peuvent être corrélées.

Sans cette hypothèse de séparabilité des préférences, le *vote séquentiel* souffre des mêmes problèmes que le vote simultané. Dans le vote séquentiel, il s'agit de voter sur les variables une par une, selon un ordre prédéfini, un agenda, et en annonçant le résultat à chaque étape. Le choix de l'agenda est un enjeux en lui-même puisqu'il soulève de nouveaux problèmes étudiés par Airiau et al. (2011), tels que : qu'est-ce qu'un bon agenda, ou encore qui le choisit. De plus, des modifications de l'agenda peuvent modifier les dépendances entre les variables et donc modifier les préférences des votants. Remarquons tout de même que, tout comme le vote simultané, le vote séquentiel possède un coût d'élicitation des préférences faible pour les votants.

Une quatrième approche possible est de ne demander aux votants qu'une petite partie de leurs préférences et ensuite d'utiliser un *principe de complétion* pour compléter ces préférences. Cela permet d'introduire un lien entre les variables tout en conservant un coût d'élicitation des préférences faible pour les votants. L'exemple 2.10 de la section 2.5.2.a illustre cette notion de complétion des préférences. Une fois l'étape de complétion des préférences effectuée, nous pouvons appliquer n'importe quelle règle de vote classique, bien que dans certains cas, certaines règles sont plus adaptées que d'autres. Présentons plusieurs familles de principe de complétion :

Fondé sur la meilleure alternative Les votants ne fournissent que leur alternative préférée. Le principe de complétion utilise une distance prédéfinie entre les alternatives pour compléter les préférences. Le mécanisme de complétion classe les alternatives en fonction de leur proximité avec l'alternative préférée. Dans le chapitre 3, nous utiliserons la distance de Hamming pour mesurer la distance entre deux alternatives.

Fondé sur le classement des variables Les votants spécifient un classement des variables en tant que singletons. Le principe de complétion étend alors ce classement à l'ensemble des alternatives. Cette famille de méthode est souvent utilisée pour la sélection d'un ensemble d'objets mais peut s'étendre à tout domaine composé de variables binaires. Dans le cadre des élections de comités, le principe d'extension de Chamberlin-Courant (ou extension optimiste) est un des plus connus. Étant donné un votant i, pour tout comité S, i est représenté par sa meilleure alternative dans S. Le principe de complétion classe les comités en suivant l'ordre de préférences des meilleures alternatives pour i.

Basé sur l'hypercube de l'ensemble des alternatives Les votants fournissent dans ce cas une représentation compacte de leurs préférences sur l'hypercube associé à l'ensemble des alternatives, c'est-à-dire, entre toutes paires d'alternatives qui sont identiques sur toutes les variables sauf une. On entend par représentation compacte un langage formel qui assigne tout mot en entrée à un vote, complet ou non, ce qui permet de ne pas donner ses préférences de façon exhaustive. Un exemple typique de langage formel compact est le langage des CP-nets, introduit par Boutilier et al. (2004).

Ainsi, en vote combinatoire, il apparaît nécessaire d'étudier de nouveaux langages pour exprimer les préférences des votants et concevoir de nouvelles règles pour agréger ces préférences. Dans le chapitre 4, nous proposerons et étudierons de nouvelles règles fondées sur le vote par approbation.

Chapitre 3
Vote par approbation et domaines combinatoires : préférences séparables

Résumé Le vote par approbation est une procédure de vote utilisée, entre autres choses, pour élire des comités ou choisir l'issue d'un référendum multiple. Elle permet aux votants de voter pour ("d'approuver") autant de candidats qu'ils le souhaitent. Deux règles de vote ont été particulièrement étudiées dans ce cadre à l'aide du vote par approbation. La règle habituelle, appelée *minisum*, choisit l'ensemble des candidats ou des propositions ayant été approuvés par le plus grand nombre de votants. La règle *minimax* élit un ensemble de candidats qui minimise le maximum, sur l'ensemble des votants, de la distance de Hamming à chacun des votes.

Comme ces deux règles semblent trop extrêmes, nous les généralisons en un ensemble continu de règles de vote, par l'utilisation de l'opérateur de moyenne ordonnée pondérée (*ordered weighted averaging*, OWA). Cette règle est paramétrée par un vecteur de poids, noté w, qui permet de définir des règles de vote entre minisum et minimax. Pour des raisons d'équité, nous nous intéressons aux vecteurs de poids décroissants et en particulier aux vecteurs binaires, notés $w(i) = (1, .., 1, 0, .., 0)$, où i représente le nombre de 0. Nous étudions la complexité algorithmique de la détermination d'un comité vainqueur et de l'ensemble des comités vainqueurs pour des règles associées aux vecteurs $w(i)$. Nous montrons qu'il est difficile de trouver un comité vainqueur pour ces règles alors que cela est facile pour minisum. De plus, nous étudions aussi le calcul d'un comité vainqueur pour des vecteurs de type quantile $q(i) = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots 0)$, où l'unique 1 correspond à la i^{e} coordonnée. Puis, nous explorons en détail la manipulabilité de ces règles quand elles sont paramétrées par des vecteurs monotones. Enfin, une étude expérimentale du nombre de comités vain-

queurs pour quelques exemples de règles, dont minisum et minimax, nous permet de mettre en perspective l'importance du mécanisme de départage des ex aequo.

Sommaire

3.1 Introduction

Comme on l'a constaté en section 2.3.4, le *vote par approbation* est aussi bien étudié dans le cadre d'élections à vainqueur unique que d'élections à vainqueurs multiples, où il a été introduit par Kilgour et al. (2006). Rappelons qu'en vote par approbation chaque votant exprime ses préférences à l'aide d'un vote qui consiste en un sous-ensemble de candidats approuvés par ce dernier (généralement sans contrainte sur la cardinalité de l'ensemble). Ainsi, ce système est adapté aux élections de comités, dans lesquelles les votants sont amenés à approuver ou non chaque candidat, mais aussi aux référendums multiples, pour lesquels les votants s'expriment pour ou contre des actions publiques.

3.1.1 Référendums multiples et élections de comités

Le recours au référendum est une pratique répandue dans les démocraties modernes. Il s'agit de faire voter un électorat, au niveau d'un pays ou d'une ville par exemple, sur une proposition précise, une action publique ou encore une nouvelle loi. Pour des raisons pratiques, des référendums portant sur des questions diverses, possiblement corrélées, peuvent être organisés le même jour. C'est ce que l'on appelle un *référendum multiple.*

Les *élections de comités*, qui rentrent dans le cadre des élections à vainqueurs multiples, ont été définies en section 2.3. Elles désignent les situations où l'on cherche à élire un sous-ensemble de représentants parmi un ensemble de candidats. L'usage du vote par approbation pour les élections de comités a été introduit en section 2.3.4.

L'exemple suivant illustre ces deux types d'élections.

Exemple 3.1. *Considérons un ensemble de 5 co-auteurs d'un article qui doivent décider s'ils vont utiliser Dropbox (d), s'il est nécessaire d'organiser une réunion en personne* (r), *si le papier est à améliorer avant la soumission (a) et s'ils soumettent ce papier en version longue (l). Les votes sont les suivants :*

$$\begin{array}{rl} & (dral) \\ P_1: & (0110) \\ P_2: & (0100) \\ P_3: & (0101) \\ P_4: & (0011) \\ P_5: & (1001) \end{array}$$

Par exemple, le premier votant ne souhaite pas utiliser Dropbox, préfère organiser une réunion en personne, pense qu'il est nécessaire d'améliorer le papier avant soumission et ne souhaite pas le soumettre en version longue (mais plutôt en version courte).

Dans cette situation, les co-auteurs doivent décider de l'ensemble des propositions acceptées. Alors, en appliquant la méthode de vote des référendums multiples, nous obtenons comme solution le vecteur (0101). *De même, l'utilisation de la règle de vote à vainqueurs multiples minisum, présentée en section 2.3.4.c, conduit au vecteur* (0101).

Ces deux types d'élections sont similaires même s'ils sont souvent étudiés séparément. Dans les deux cas, il s'agit de choisir collectivement un vecteur de valeurs binaires, correspondant dans un cas à un comité, dans l'autre cas à un ensemble de propositions adoptées. Les deux cas peuvent aussi présenter des contraintes sur l'ensemble des décisions admissibles. Par exemple, le nombre de candidats à élire dans un comité peut être sujet à des contraintes de cardinalité. De plus, les méthodes de vote utilisées dans ces deux contextes font l'hypothèse que les préférences des votants sont séparables.

Les préférences *séparables* sont telles qu'il n'existe pas de dépendances préférentielles entre les candidats. L'exemple de la section 2.5.2 illustre cette notion.

Dans les procédures d'élections de comités que nous étudierons dans ce chapitre, à savoir les procédures de centralisation, il est fait l'hypothèse que les préférences sont séparables. En effet, ces procédures utilisent la *distance de Hamming* pour mesurer la proximité d'un comité au profil, ce qui implique que les préférences sur un candidat ne dépendent pas des préférences sur les autres candidats. De même, dans les référendums multiples, les préférences sont supposées séparables. Les votants sont invités à s'exprimer sur chaque proposition de façon indépendante et les propositions approuvées par la majorité sont adoptées.

Les élections de comités et les référendums multiples sont donc deux domaines de vote proche au niveau de la structure de l'ensemble des alternatives mais aussi au niveau des hypothèses prises sur les préférences des votants (séparabilité). On peut donc appliquer les mêmes méthodes de vote pour ces deux situations.

3.1.2 Motivation et plan

Dans le cas d'une élection à vainqueurs multiples, il existe plusieurs méthodes pour trouver le comité vainqueur, c'est-à-dire le sous-ensemble de candidats vainqueurs. Nous nous intéresserons, dans ce chapitre, aux procédures dites de centralisation, définies en section 2.3.4.c.

Rappelons que la première de ces procédures de centralisation, *minisum*, est équivalente à la méthode par approbation simple qui consiste à choisir les candidats selon leurs scores d'approbation. Dans le cas où le comité doit être de taille k, les candidats avec les k plus grands nombres d'approbations sont élus. Dans le cas où il n'existe pas de contrainte sur la taille du comité, les candidats approuvés par une majorité de votants sont élus.

Cependant, comme il est montré par Brams et al. (2007a), cette règle peut être injuste envers certains votants, qui peuvent être en total désaccord avec le comité élu. Pour remédier à cela, ils définissent la procédure minimax, qui élit un comité qui minimise le maximum de la distance de Hamming aux votes sur l'ensemble des votants. La règle minimax est plus équitable (au sens *égalitaire*) que la méthode simple, puisqu'elle minimise le désaccord avec le votant le moins satisfait.

Comme ces deux règles sont, en un sens, trop extrêmes, nous les généralisons en un ensemble continu de règles de vote, par l'utilisation de l'opérateur de moyenne ordonnée pondérée (*ordered weighted averaging* ou OWA). L'opérateur OWA, introduit par Yager, 1993), est un opérateur d'agrégation paramétré par un vecteur de poids, noté w, qui permet de modéliser de nombreux opérateurs, comme par exemple le maximum, le minimum, la moyenne arithmétique ou encore la médiane. Le score agrégé obtenu par l'OWA correspond à la somme pondérée d'un vecteur de score initial, réordonné dans l'ordre croissant, avec le vecteur de poids.

Nous introduisons dans la section suivante, les règles de vote par approbation fondées sur les OWA, notées AV_w. Un comité vainqueur pour AV_w est un comité qui minimise le score O_w, qui correspond au score agrégé de l'OWA paramétrée par w. Pour des raisons d'équité, nous portons une attention particulière à une sous-famille de règles, paramétrée par des vecteurs de poids décroissants. Avec des vecteurs de poids décroissants, il est possible de modéliser des règles de vote qui se situent entre minisum et minimax inclues.

Dans un premier temps, nous étudions une famille simple d'AV_w, paramétrée par les vecteurs de poids $w(i) = (1, \ldots 1, 0, \ldots, 0)$, où i représente le nombre de 0. Pour ces règles, nous montrons certaines propriétés vérifiées par les candidats nécessairement vainqueurs. Puis nous étudions la complexité algorithmique de la détermination d'un comité vainqueur. Ensuite, nous étudions la complexité algorithmique de la détermination d'un comité vainqueur pour des vecteurs de type quantile $q(i) = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots 0)$, où l'unique 1 correspond à la i^{e} coordonnée. Puis, nous donnons des résultats concernant la manipulabilité des règles AV_w paramétrées par des vecteurs de poids monotones (décroissants ou croissants). Enfin, une étude expérimentale du nombre de comités vainqueurs pour quelques exemples de règles, dont minisum et minimax, nous permet de mettre en perspective l'importance du mécanisme de départage des ex aequo.

3.1.3 Travaux en lien

Ce chapitre est lié à plusieurs directions de recherche. La première est l'étude des règles de vote généralisant le vote par approbation (tel qu'il est défini pour des élections à vainqueur unique) afin d'élire des comités. Il existe plusieurs procédures pour élire des comités avec le vote par approbation, listées en section 2.3.4. C'est dans ce contexte que la règle de minimax a été proposée par Brams et al. (2007a).

La seconde direction de recherche est l'utilisation, notamment dans un contexte de vote, des moyennes ordonnées pondérées, définies par Yager. Les OWA ont été étudiées dans de nombreux domaines et en particulier en aide à la decision multi-critère et en décision dans l'incertain par Yager et Kacprzyk (1997). L'utilisation d'OWA dans le contexte du vote a fait l'objet d'articles plus récents par Elkind et Ismaili (2015), Goldsmith et al. (2014) et Skowron et al. (2015).

La troisième direction de recherche est une série de travaux sur les aspects algorithmiques et stratégiques des élections à vainqueurs multiples, en particulier ceux qui supposent que les bulletins émis par les votants sont des "bulletins d'approbation", c'est-à-dire

des sous-ensembles de candidats approuvés.
Meir et al. (2008a) étudient la "résistance computationnelle" du vote par approbation à vainqueurs multiples. Procaccia et al. (2008a) s'intéressent au calcul de deux règles de vote à vainqueurs multiples, celle de Chamberlin et Courant et celle de Monroe pour lesquelles ils montrent la NP-complétude du calcul d'un comité vainqueur, même dans le cas où les bulletins sont de type approbation. Certaines variantes du vote par approbation sont difficiles à calculer. C'est le cas pour la règle minimax dont les aspects algorithmiques et stratégiques ont été étudiés par Caragiannis et al. (2010), et LeGrand et al. (2007). D'autres extensions du vote par approbation en règles à vainqueurs multiples ont aussi été montrées difficiles à calculer, comme l'approbation proportionnelle par Aziz et al. (2015).

La règle minimax est par ailleurs liée au domaine de l'agrégation (ou fusion) égalitariste de croyances, dont l'objectif est de combiner plusieurs informations provenant de différentes sources. On trouvera plus d'informations sur ce lien dans Konieczny et Pino-Pérez (2011). Il existe d'ailleurs des opérateurs de fusion de croyances qui utilisent les OWA, comme ceux présentés par Konieczny et al. (2004).

3.2 Notions préliminaires

3.2.1 Les moyennes ordonnées pondérées

Les *moyennes ordonnées pondérées* (ordered weighted averaging, OWA) forment une classe paramétrée d'opérateurs d'agrégation de type moyenne introduite par Yager. Les OWA permettent de modéliser la plupart des opérateurs d'agrégation de type moyenne comme le minimum, le maximum, ou encore la médiane. Formellement, étant donné un vecteur H, nous noterons $H^{\downarrow}$ le vecteur obtenu en ordonnant les coordonnées de H dans l'ordre décroissant. L'opérateur OWA, paramétré par un vecteur de poids, noté w, agrège le vecteur de score H en un score agrégé, noté $O_w(H)$:

$$H \mapsto O_w(H) = w \times H^{\downarrow}$$

Le choix du vecteur de poids définit le type d'opérateur que l'on utilise :

- L'opérateur min : $w = (0, \ldots, 0, 1)$
- L'opérateur max : $w = (1, 0, \ldots, 0)$
- La moyenne arithmétique : $w = (1/n, \ldots, 1/n)$
- Le calcul du score lors d'un concours de patinage artistique : $w = (0, 1, \ldots, 1, 0)$

Notons que cette définition des OWA diffère légèrement de celle introduite par Yager car nous n'utilisons pas de vecteurs de poids normalisés.

Les OWA ont été étudiées dans de nombreux domaines et en particulier en aide à la decision multi-critère et en décision dans l'incertain par Yager et Kacprzyk (1997).

L'utilisation d'OWA dans le contexte du vote a fait l'objet d'articles plus récents par Elkind et Ismaili (2015), Goldsmith et al. (2014) et Skowron et al. (2015).

3.2.2 Les procédures de centralisation

Nous considérons une élection E avec m candidats $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ et n votants $N = \{1, \ldots, n\}$. Le *vote d'approbation* de chaque votant i est un sous-ensemble de X, représenté sous la forme d'un vecteur binaire $P_i \in \{0,1\}^m$, dans lequel le j^{e} bit de P_i est 1 si le votant i approuve le candidat j et 0 sinon. Un *profil d'approbations*, $P = (P_i)_{i \in N}$, est une collection de votes d'approbation. Étant donné un vecteur v de taille m, nous notons v_i la i^{e} coordonnée du vecteur v. Étant donnés deux vecteurs binaires $v, v' \in \{0,1\}^m$, nous notons $H(v, v')$ leur *distance de Hamming*, c'est-à-dire le nombre de bits sur lesquels ils diffèrent. Étant donné un vecteur binaire $c \in \{0,1\}^m$, appelé *comité*, et un profil d'approbations P, le vecteur $H(c, P) = (H(c, P_i))_{i \in N}$ représente le vecteur des distances de Hamming entre c et chacun des votes de P. Le *score d'approbation* d'un candidat x, noté $app(x)$, est le nombre de votants qui approuvent x.

En vote par approbation à vainqueurs multiples, le but est d'élire un *comité*, c'est-à-dire un sous-ensemble de X. Dans certains cas, la taille du comité est fixée à un entier k ; dans d'autres elle n'est pas fixée et tous les comités sont admissibles.

La règle *minisum* consiste à élire un comité qui minimise la somme des distances de Hamming aux votes. Rappelons que cette règle est équivalente à l'approbation simple, procédure de score définie en section 2.3.4. De manière formelle, c^* est un comité vainqueur pour minisum si et seulement si

$$\sum_{i \in N} H(c^*, P_i) = \min_{c \in \{0,1\}^m} \sum_{i \in N} H(c, P_i)$$

Un *comité vainqueur à la majorité* est un comité qui contient tout candidat approuvé par strictement plus de $n/2$ votants et aucun candidat approuvé par strictement moins de $n/2$ votants. Il a été montré par Brams et al. (2007a) qu'un comité vainqueur pour minisum est un comité vainqueur à la majorité et inversement. Ainsi, étant donné un profil d'approbations P, un comité vainqueur pour minisum peut être déterminé facilement.

La règle *minimax* élit un comité qui minimise la distance maximum avec le profil. De façon formelle, c^* est un comité vainqueur pour minimax si et seulement si

$$\max_{i \in N} H(c^*, P_i) = \min_{c \in \{0,1\}^m} \{\max_{i \in N} H(c, P_i)\}$$

Étant donné un profil d'approbations P, déterminer un comité vainqueur pour minimax est NP-difficile puisque cela est équivalent au problème de *closest binary string* en théorie des codes. Ce problème a été montré NP-difficile indépendamment par Frances et Litman (1997) et Li et al. (1999).

Théorème 2. *Étant donné un profil d'approbations, il est NP-difficile de déterminer un comité vainqueur pour la règle minimax.*

L'exemple suivant illustre ces deux règles :

Exemple 3.2. *Considérons une élection E avec 6 votants $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 4 candidats $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et le profil P suivant :*

$$\begin{array}{ll} P_1 : & (0110) \\ P_2 : & (0100) \\ P_3 : & (0101) \\ P_4 : & (0011) \\ P_5 : & (1001) \\ P_6 : & (0001) \end{array}$$

Le tableau suivant présente les distances de Hamming, le score minisum et le score minimax de certains comités. Il est facile de vérifier que les comités non mentionnés dans cet exemple ne sont pas des comités vainqueurs pour minisum ou minimax.

$H(c, P_i)$	1	2	3	4	5	6	*sum*	*max*
$c_1 = (0000)$	2	1	2	2	2	1	10	2
$c_2 = (0001)$	3	2	1	1	1	0	8	3
$c_3 = (0101)$	2	1	0	2	2	1	8	2

Les comités vainqueurs pour minisum sont c_2 et c_3, tandis que ceux de minimax sont c_1 etc_3.

3.2.3 Une nouvelle famille de règles de vote par approbation : AV_w

Nous généralisons minisum et minimax à l'aide d'un ensemble continu de règles de vote en utilisant l'opérateur de moyenne ordonnée pondérée (OWA) appliqué au vote par approbation.

Nous pouvons maintenant introduire les règles de votes par approbation fondées sur les OWA que l'on notera AV_w. Un comité c^* est un comité vainqueur pour AV_w si et seulement si c^* minimise le score O_w parmi les comités, c'est-à-dire

$$O_w(H(c^*, P)) = \min_{c \in \{0,1\}^m} \{O_w(H(c, P))\}.$$

L'exemple suivant illustre ces règles de vote ainsi qu'une partie des notations introduites :

Exemple 3.3. *Considérons l'élection de l'exemple précédent. Le tableau suivant présente les scores O_w de certains comités.*

c	$w \times H^{\downarrow}(c, P)$
c_1	$2 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 + 2 \cdot w_3 + 2 \cdot w_4 + 1 \cdot w_5 + 1 \cdot w_6$
c_2	$3 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3 + 1 \cdot w_4 + 1 \cdot w_5 + 1 \cdot w_6$
c_3	$2 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 + 2 \cdot w_3 + 1 \cdot w_4 + 1 \cdot w_5 + 0 \cdot w_6$

En prenant $w = (6, 5, 4, 3, 2, 1)$, les scores de c_1, c_2 et c_3 sont respectivement 39, 37 et 35. Nous pouvons vérifier qu'il n'y a pas de meilleurs scores et que le comité vainqueur est donc c_3. Intuitivement, le choix de $w = (6, 5, 4, 3, 2, 1)$ signifie que l'on attribue un coefficient de 6 à la plus grande distance entre le comité et le profil, un coefficient de 5 à la distance suivante dans l'ordre décroissant (qui peut être égale à la précédente) et ainsi de suite jusqu'au coefficient de 1 attribué à la plus petite distance.
Maintenant en prenant $w = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$, les scores de c_1, c_2 et c_3 deviennent respectivement 6, 6, 6 et ces trois comités sont les comités vainqueurs. Enfin, en prenant $w = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$, les scores sont 8, 7, 7 et les comités vainqueurs sont donc c_2 et c_3.

Pour des raisons d'équité, nous nous intéresserons aux vecteurs de poids *décroissants*, qui attribuent plus de poids aux votants les moins satisfaits.

Les règles de vote AV_w paramétrées par des vecteurs de poids décroissants nous permettent de modéliser un ensemble de règles de votes se situant entre minisum et minimax, qui sont respectivement modélisées par les vecteurs $w = (1, \ldots, 1)$ et $w = (1, 0 \ldots, 0)$.

On s'intéressera en particulier à la famille de vecteurs $w(i) = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, où i est le nombre de 0, pour $i = 0, \ldots, n-1$. Cette famille contient des règles allant de minisum (qui correspond à $w(0)$) à minimax (qui correspond à $w(n-1)$). Dans l'exemple 3.3, les vecteurs de poids $w = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$ et $w = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ correspondent respectivement aux vecteurs $w(4)$ et $w(3)$, pour une élection comportant 6 votants.

De plus, nous nous intéresserons aussi à la famille de vecteurs de poids $q(i)$ qui modélise des fonctions de type quantile : $q(i) = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$, où l'unique 1 du vecteur correspond à la i^e coordonnée. Pour illustrer cette famille de vecteurs reprenons l'exemple 3.3. Avec le vecteur $q(6)$, les scores de c_1, c_2 et c_3 sont respectivement 1, 0 et 0, et les comités c_2 et c_3 sont vainqueurs. Le vecteur $q(3)$ conduit à l'élection du comité c_2 seulement. Enfin le vecteur $q(1)$ produit c_1 et c_3 comme comités vainqueurs.

Enfin, nous définissons les élections dites *équilibrées* comme l'ensemble des élections pour lesquelles chaque candidat est approuvé par exactement la moitié des votants.

3.3 Détermination d'un comité vainqueur

Nous commençons l'étude des règles AV_w par leurs aspects algorithmiques. Une famille de AV_w nous intéressera en particulier, la famille des $AV_{w(i)}$, paramétrées par des vecteurs de type $w(i) = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, où i est le nombre de 0. Tout d'abord, nous présenterons certaines propriétés vérifiées par les candidats vainqueurs de telles règles de vote, portant sur les conditions pour qu'un candidat soit membre de tous les comités vainqueurs ou bien d'aucun. Ces propriétés nous amèneront ensuite à déterminer la complexité de la détermination d'un comité vainqueur. Le résultat principal de cette partie est la NP-complétude de ce problème pour les règles $AV_{w(i)}$, pour tout i fixé, $i \geq 1$. Nous étudierons aussi la complexité de ce problème pour les règles de types quantiles $AV_{q(i)}$.

3.3.1 Candidats nécessairement vainqueurs, perdants

Dans cette section, nous étudions une famille simple de vecteurs de poids décroissants de type $w(i) = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, où i est le nombre de 0. Nous explorons certaines propriétés liées aux candidats vainqueurs.

Dans un premier temps, nous donnons une condition suffisante pour qu'un candidat individuel soit membre de tous les comités vainqueurs, ou ne soit membre d'aucun comité vainqueur.

Proposition 3.1. *Pour toute règle $AV_{w(i)}$, $i \in N$, un candidat approuvé par au moins $(n+i+1)/2$ votants appartient à tous les comités vainqueurs.*

Preuve. Considérons une élection E et une règle $AV_{w(i)}$, pour $i \in N$. Supposons qu'il existe un candidat x approuvé par au moins $(n+i+1)/2$ votants, tel qu'il existe un comité vainqueur c qui ne contient pas x. Alors, le score d'approbation de x vérifie les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} app(x) &\geq (n+i+1)/2 \\ 2 \cdot app(x) - n &\geq i+1 \\ (app(x) - i) - (n - app(x)) &\geq 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Étudions alors le score $O_{w(i)}$ du comité $c' = c \cup \{x\}$. Par rapport à c, il y à $app(x)$ votants qui voient leur distance de Hamming réduite de 1 et $(n - app(x))$ qui voient leur distance de Hamming augmentée de 1. Puisque nous avons considéré le vecteur de poids $w(i)$, les i derniers scores du vecteur $H^{\downarrow}(c, P)$ ne sont pas pris en compte dans le calcul du score de c'. Ainsi, le pire des cas est obtenu quand ces i derniers scores correspondent à des votants qui approuvent x. Or, d'après l'inégalité 3.1, même dans ce cas, la différence entre le score $O_{w(i)}$ de c' et le score $O_{w(i)}$ de c, qui est alors égale à $(app(x)-i)-(n-app(x))$, est strictement positive, ce qui est contradictoire avec le fait que c soit un comité vainqueur. □

De plus, en étudiant les candidats qui sont approuvés par au moins $(n+i)/2$, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.2. *Pour toute règle $AV_{w(i)}$, $i \in N$, un candidat approuvé par au moins $(n+i)/2$ votants ne détériore pas le score d'un comité auquel il est ajouté.*

Preuve. La démonstration est identique à celle de la preuve de la proposition 3.1. En effet, d'après l'équation 3.1 de cette preuve, un candidat approuvé par $(n+i+1)/2$ améliore strictement le score d'un comité auquel il est ajouté, mais il suffit qu'un candidat soit approuvé par $(n+i)/2$ pour qu'il ne détériore pas le score d'un comité auquel il est ajouté. □

À l'aide d'une argumentation similaire à la preuve de la proposition 3.1, nous obtenons la proposition 3.3 qui permet de déterminer une condition suffisante pour qu'un candidat ne soit dans aucun comité vainqueur.

Proposition 3.3. *Pour toute règle $AV_{w(i)}$, $i \in N$, un candidat approuvé par au plus de $(n-(i+1))/2$ votants n'appartient à aucun comité vainqueur.*

Par analogie à la proposition 3.2, nous obtenons la remarque suivante :

Proposition 3.4. *Pour toute règle $AV_{w(i)}$, $i \in N$, un candidat approuvé par au plus $(n-i)/2$ votants n'améliore pas le score d'un comité auquel il est ajouté.*

Les propositions 3.1 et 3.3 généralisent le résultat de Brams et al. (2007a) qui énonce qu'un comité vainqueur à la majorité est un comité vainqueur pour minisum. Ces deux propositions nous permettent d'établir les liens suivants entre minisum et $AV_{w(1)}$ d'une part, et entre $AV_{w(n-2)}$ et minimax d'autre part.

Proposition 3.5. *Étant donné un profil P, il existe toujours un comité c tel que c soit un comité vainqueur pour minisum et pour $AV_{w(1)}$.*

Preuve. Nous distinguons deux cas.
Dans un premier temps, considérons une élection avec un nombre impair de votants. Nous construisons le comité c vainqueur pour $AV_{w(1)}$, de la manière suivante :

- Les candidats approuvés par plus de $(n+3)/2$ votants appartiennent à c, d'après la proposition 3.1.
- Les candidats approuvés par moins de $(n-3)/2$ votants n'appartiennent pas au comité c, d'après la proposition 3.3.
- Les candidats approuvés par exactement $(n+1)/2$ votants appartiennent à c. En effet, ajouter ces candidats à c ne peut pas détériorer son score, d'après la proposition 3.2.
- Les candidats approuvés par exactement $(n-1)/2$ votants n'appartiennent pas à c. En effet, ajouter ces candidats à c ne peut pas améliorer son score, d'après la proposition 3.4.

De plus, c est par définition un comité vainqueur à la majorité, donc c est un comité vainqueur pour minisum.

Dans un second temps, considérons une élection avec un nombre pair de votants. Soit c un comité vainqueur pour $AV_{w(1)}$. D'après les propositions 3.1 et 3.3, on a :

- Les candidats approuvés par plus de $(n+2)/2$ votants appartiennent à c.
- Les candidats approuvés par moins de $(n-2)/2$ votants n'appartiennent pas au comité c.

Ainsi, par définition, le comité c est un comité vainqueur à la majorité, donc c est un comité vainqueur pour minisum. □

Cependant, le résultat de la proposition 3.5 ne se généralise pas à l'intersection de $AV_{w(1)}$ et $AV_{w(2)}$, comme le montre l'exemple suivant, que l'on a trouvé par ordinateur :

Exemple 3.4. *Considérons une élection E avec un ensemble de sept votants $\{1, \ldots, 7\}$, un ensemble de cinq candidats $\{x_1, \ldots, x_5\}$ et le profil d'approbations défini par :*

$$\begin{array}{rl} P_1 : & (01111) \\ P_2 : & (01111) \\ P_3 : & (01110) \\ P_4 : & (11111) \\ P_5 : & (10000) \\ P_6 : & (10000) \\ P_7 : & (01011) \end{array}$$

Il existe alors un unique comité vainqueur pour $AV_{w(1)}$, le comité (01111)*, et un unique comité vainqueur pour $AV_{w(2)}$, le comité* (11010).

Il est intéressant de noter que nous n'avons pas pu générer d'exemple similaire avec un nombre pair de votants. Le problème reste donc ouvert pour $AV_{w(1)}$ et $AV_{w(2)}$ lorsque le nombre de votants est pair. Nous conjecturons que ce contre-exemple se généralise pour toute paire d'entiers $(i, i+1)$ pour $2 \leq i \leq n-3$, c'est-à-dire qu'il existe un profil d'approbations P tel qu'il n'existe pas un comité vainqueur à la fois pour $AV_{w(i)}$ et $AV_{w(i+1)}$. Cependant, pour $i = n-2$, la propriété est à nouveau vérifiée :

Proposition 3.6. *Étant donné un profil P, il existe toujours un comité c tel que c est un comité vainqueur pour $AV_{w(n-2)}$ et pour minimax.*

Preuve. Considérons une élection E avec n votants et m candidats. Soit c un comité vainqueur pour minimax. Soit c' un comité vainqueur pour $AV_{w(n-2)}$ tel que c' soit un comité vainqueur maximisant la seconde coordonnée du vecteur ordonné des distances de Hamming de c'.

Nous affirmons alors que c' est un comité vainqueur pour minimax ou c est un comité vainqueur pour $AV_{w(n-2)}$.
En effet, supposons que c' ne soit pas un comité vainqueur pour minimax et que c ne soit pas un comité vainqueur pour $AV_{w(n-2)}$. Le fait que c' ne soit un comité vainqueur pour minimax implique que le score $O_{w(n-1)}$ de c' est strictement supérieur à celui de c :

$$O_{w(n-1)}(H(c',P)) > O_{w(n-1)}(H(c,P)),$$

ce qui équivaut à dire que

$$H^{\downarrow}(c',P)_1 \geq H^{\downarrow}(c,P)_1 + 1. \tag{3.2}$$

De même, le fait que c ne soit pas un comité vainqueur pour $AV_{w(n-2)}$ implique que le score $O_{w(n-2)}$ de c est strictement supérieur à celui de c' :

$$O_{w(n-2)}(H(c,P)) > O_{w(n-2)}(H(c',P)),$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{j=1}^{2} H^{\downarrow}(c,P)_j \geq \sum_{j=1}^{2} H^{\downarrow}(c',P)_j + 1. \tag{3.3}$$

Les inéquations (3.2) et (3.3) impliquent que

$$H^{\downarrow}(c',P)_2 + 2 \quad \leq \quad H^{\downarrow}(c,P)_2,$$

ainsi, nous avons

$$H^{\downarrow}(c',P)_2 + 2 \quad \leq \quad H^{\downarrow}(c,P)_1.$$

En utilisant (3.2), on obtient alors

$$\begin{aligned} H^{\downarrow}(c',P)_2 + 2 &\leq H^{\downarrow}(c',P)_1 - 1, \\ H^{\downarrow}(c',P)_2 + 3 &\leq H^{\downarrow}(c',P)_1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

D'après l'inégalité 3.4, il existe au moins un candidat x tel que le votant qui correspond à la seconde plus grande distance de Hamming de c' soit en accord avec c' sur x et le votant qui correspond à la plus grande distance de Hamming de c' soit en désaccord avec c' sur x. Dans un premier temps, supposons que x appartient à c'. Alors, si nous considérons le comité $d = c' \backslash \{x\}$, la distance $H^{\downarrow}(d,P)_2$ augmente de 1, et la distance $H^{\downarrow}(d,P)_1$ diminue de 1, comparées aux distances de c'. Mais alors d est un comité vainqueur pour $AV_{w(n-2)}$, tel que $H^{\downarrow}(d,P)_2 > H^{\downarrow}(c',P)_2$, ce qui contredit la définition de c'.
Avec le même argument, on peut montrer que si x n'appartient pas à c' on aboutit aussi à une contradiction. □

Le lien entre les comités vainqueurs pour minisum et $AW_{w(1)}$ a des conséquences sur le calcul de ces règles que nous présentons dans la partie suivante.

3.3.2 Complexité du calcul d'un comité vainqueur

3.3.2.a Pour les règles $AV_{w(i)}$

À propos de la complexité du calcul d'un comité vainqueur pour AV_w, nous savons que (a) trouver un comité vainqueur pour minisum est polynomial, et qu'il est facile de donner une simple caractérisation de l'ensemble des comités vainqueurs ; (b) trouver un comité vainqueur pour minimax est NP-difficile. Nous commençons par montrer que, sous la restriction que le nombre de votant soit impair, il existe d'autres règles AV_w que minisum pour lesquelles on peut trouver un comité vainqueur en temps polynomial. En effet, quand le nombre de votants est impair, trouver un comité vainqueur pour $AV_{w(1)}$ est polynomial.

Proposition 3.7. *Si n est impair, on peut déterminer un comité vainqueur pour $AV_{w(1)}$ en temps polynomial.*

Preuve. Considérons une élection E, avec un nombre impair de votants n et le comité suivant $c = \{x \in X, \text{ tel que } app(x) \geq (n+1)/2\ \}$. Comme il est montré dans la preuve de la proposition 3.5, c est un comité vainqueur pour $AV_{w(1)}$. □

Le résultat positif de la proposition 3.7 ne peut pas être généralisé pour un nombre quelconque de votants, car la preuve s'appuie sur une étude de cas qui ne s'applique pas lorsque le nombre de votants est pair. En effet, dans ce cas, il existe des candidats avec exactement $n/2$ votes, qui peuvent donc avoir un impact négatif ou positif sur le score d'un comité. Il est en fait NP-difficile de déterminer un comité vainqueur pour $AV_{w(i)}$ dans le cas général, pour tout i fixé, $i \geq 1$, comme nous allons le démontrer maintenant.

Pour le montrer, nous étudions le problème de décision associé à $AV_{w(i)}$ et montrons que ce problème est NP-complet, pour tout i fixé, $i \geq 1$. De plus, nous prouvons ce résultat pour un cas particulier d'élection, appelées *élections équilibrées*, dans lesquelles chaque candidat est approuvé par exactement la moitié des votants.

Tout d'abord, étudions le comportement de minimax vis-à-vis des élections équilibrées. Nous savons qu'il est NP-difficile de déterminer un comité vainqueur pour minimax. Nous allons montrer que cela reste NP-difficile lorsque l'on se restreint au cas des élections équilibrées, en montrant que le problème de décision associé à minimax reste NP-complet dans le cas d'élections équilibrées.

Afin de le montrer, nous définissons le problème Balanced 3-SAT. Étant donné un ensemble $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de n variables binaires et un ensemble $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$ de m clauses, chacune de taille 3, telles que chaque variable apparaît autant de fois en tant que littéral positif qu'en tant que littéral négatif, peut-on affecter la valeur vrai ou faux à chacune des variables pour que chaque clause contienne au moins un littéral vrai ? D'après Berman et al. (2003), ce problème est NP-complet.

Avant d'étudier la complexité de minimax sur les élections équilibrées, démontrons les propriétés suivantes :

Proposition 3.8. *Considérons une instance de Balanced 3-SAT. Alors*

(i) le nombre de clauses est pair ;

(ii) pour toute variable x_j, le nombre de clause où x_j n'apparaît pas (ni comme littéral positif ni comme littéral négatif) est pair.

Preuve. Considérons une instance I de Balanced 3-SAT définie par un ensemble de variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et un ensemble de clauses $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$. Étant donnée une variable x, notons $\alpha(x)$ (respectivement $\alpha(\bar{x})$) le nombre d'occurrences du littéral positif x (respectivement du littéral négatif $\bar{x}$) dans C.
Nous savons que

$$3 \cdot m = \sum_{j=1}^{n} \alpha(x_j) + \alpha(\bar{x_j}).$$

De plus, comme l'instance est équilibrée,

$$3 \cdot m = 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha(x_j).$$

Ainsi, le nombre de clauses, m, doit être pair. Le nombre de clauses où x n'apparaît pas est égal à $(m - 2 \cdot \alpha(x_j))$. Ce nombre est donc également pair. □

Nous allons maintenant définir le problème de décision associé à minimax sur les élections équilibrées et montrer qu'il est NP-complet.

D-Minimax : Étant donnés une élection $E = (X, N, P)$ et un entier k, existe-t-il un comité c tel que la distance de Hamming entre c et chaque vote de P soit au plus k ?

Théorème 3. *D-Minimax est NP-complet, même pour les élections équilibrées.*

Preuve. Le problème est clairement dans NP. La preuve est basée sur une réduction depuis le problème Balanced 3-SAT. Considérons une instance I de Balanced 3-SAT définie par un ensemble de n variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et un ensemble de m clauses $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$. Nous construisons une instance I' de D-Minimax comme suit. Nous créons un ensemble de $2n$ candidats $X' = \{x'_1, \ldots, x'_{2n}\}$ et un ensemble de $m + 6n + 2$ votants $N = \{1, \ldots, m{+}6n{+}2\}$. Les m premiers votants sont définis à partir des clauses : à chaque clause C_i, nous associons un votant i avec le vote $P_i = P_{i1}P_{i2} \ldots P_{in}$ sur X', tel que :

$$P_{ij} = \begin{cases} 00 & \text{si le littéral } x_j \in C_i, \\ 11 & \text{si le littéral } \bar{x}_j \in C_i, \\ 01 \text{ ou } 10 & \text{si la variable } x_j \text{ n'apparaît pas dans } C_i. \end{cases}$$

D'après la proposition 3.8, nous savons que le nombre de clauses dans lesquelles une variable n'apparaît pas est pair. Ainsi, pour obtenir une élection equilibrée, nous poserons 01 pour la moitié des votants qui correspondent à des clauses où x_j n'apparaît pas et 10 pour l'autre moitié.

Les $6n+2$ votants restants sont des votants artificiels que nous ajoutons de la façon suivante. Pour un couple de bits $b \in \{00, 11, 01, 10\}$, nous notons $r(b,i)$ le vote d'approbation $(10)^{i-1}b(10)^{n-i}$, et $R_n(b)$ l'ensemble des n votes d'approbation $\{r(b,i)|1 \leq i \leq n\}$. De même, nous définissons $q(b,i) = (01)^{i-1}b(01)^{n-i}$ et $Q_n(b) = \{q(b,i)|1 \leq i \leq n\}$. Alors, les $6n+2$ votants sont :

$$\{R_n(00) \cup R_n(11) \cup R_n(01) \cup \{(10)^n\} \cup Q_n(00) \cup Q_n(11) \cup Q_n(10) \cup \{(01)^n\}\}$$

Ainsi, le profil P est égal à :

$$R_n(00) \cup R_n(11) \cup R_n(01) \cup \{(10)^n\} \cup Q_n(00) \cup Q_n(11) \cup Q_n(10) \cup \{(01)^n\} \cup \{P_i|1 \leq i \leq m\}$$

Clairement, par construction des votes P_i, $i = 1, \ldots, m$ et par définition des votes $R_n(b)$ and $Q_n(b)$, chaque candidat est approuvé par exactement la moitié des votants. Enfin, nous avons $k = n+1$. On obtient ainsi une instance I' de D-Minimax sur une élection équilibrée. De plus, I' peut-être construite à partir de I en temps polynomial.

Maintenant nous allons montrer que I est une instance positive si et seulement si I' est une instance positive, c'est-à-dire, qu'il existe un comité c tel que la distance de Hamming entre c et chaque vote de P est au plus $n+1$. D'abord, supposons que I est une instance positive. Nous construisons un comité c comme suit : $c = c_1 c_2 \ldots c_n$ avec

$$c_i = \begin{cases} 00 & \text{si } x_i \text{ est vrai,} \\ 11 & \text{si } x_i \text{ est faux.} \end{cases}$$

Par construction des votes P_i, nous obtenons immédiatement que $H(c, P_i) \leq n+3$, pour $i = 1, \ldots, m$. De plus, puisque I est une instance positive, il existe au moins un littéral vrai dans chaque clause. Ainsi, pour tout vote P_i, $i = 1, \ldots, m$, il existe P_{ij} tel que l'on a soit $P_{ij} = 00$ et $c_j = 00$, soit $P_{ij} = 11$ et $c_j = 11$. Ainsi, $H(c, P_i) \leq n+1$, pour $i = 1, \ldots, m$.

De plus, par définition des votes $R_n(b)$ et $Q_n(b)$, nous avons $H(c, r(b,i)) \leq n+1$ et $H(c, q(b,i)) \leq n+1$, pour $i = 1, \ldots, n$. De même pour les votes $(10)^n$ et $(01)^n$, on a $H(c, (10)^n) \leq n+1$ et $H(c, (01)^n) \leq n+1$, par construction. Ainsi, I' est une instance positive.

Maintenant supposons que I' est une instance positive et notons c un comité tel que $H^{\downarrow}(c, P)_{m+6n+2} \leq n+1$. Tout d'abord, montrons que c est de la forme suivante : $c = c_1 c_2 \ldots, c_n$, avec $c_i \in \{00, 11\}$, pour $i = 1, \ldots, n$. Par contradiction, supposons qu'il existe $c_i \in \{01, 10\}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Notons n_{10} (resp. n_{01}) le nombre de 10 (resp. 01) dans la factorisation de c. Sans perte de généralité, supposons que $n_{10} \leq n_{01}$. Nous considérons alors deux cas :

Cas 1 : $0 < n_{10} \leq n_{01}$. Notons i le plus petit indice tel que $c_i = 10$. Alors, nous obtenons $H(c, r(01, i)) = 2 + 2n_{01} + n - n_{10} - n_{01} = n + 2 + n_{01} - n_{10} \geq n + 2$, ce qui contredit la définition de c.

Cas 2 : $n_{10} = 0 < n_{01}$. Alors $H(c, (10)^n) = n + n_{01}$. Puisque $H(c, (10)^n) \leq n + 1$, nous obtenons que $n_{01} = 1$. Notons i le plus petit indice tel que $c_i \neq 01$. Si $c_i = 11$, alors $H(c, r(00, i)) = n + 2$, et si $c_i = 00$, alors $H(c, r(11, i)) = n + 2$, ce qui contredit dans les deux cas la définition de c.

Nous pouvons donc conclure que $c_i \in \{00, 11\}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Et puisque nous avons $H^{\downarrow}(c, P)_{m+6n+2} \leq n + 1$, nous obtenons que pour tout vote P_i, il existe j tel que soit $P_{ij} = 00$ et $c_j = 00$, soit $P_{ij} = 11$ et $c_j = 11$. Dans le premier cas, nous posons $x_j =$ vrai et dans le second cas nous posons $x_j =$ faux. Ainsi, I est une instance positive. $\square$

Maintenant, définissons le problème de décision associé à $AV_{w(i)}$, pour un i fixé.

D-$AV_{w(i)}$: Étant donnés une élection $E = (X, N, P)$ et un entier k, existe-t-il un comité c tel que $w(i) \times H^{\downarrow}(c, P)$ soit au plus k ?

Nous pouvons désormais montrer que le problème D-$AV_{w(n-i)}$ est NP-complet sur les élections équilibrées, pour tout entier i fixé, $i \geq 1$.

Proposition 3.9. *Pour tout entier i fixé, $i \geq 1$, D-$AV_{w(n-i)}$ est NP-complet, même pour les élections équilibrées.*

Preuve. Tout d'abord le problème est clairement dans NP. Notre preuve est basée sur une réduction depuis le problème de décision associé à minimax, D-minimax, sur les élections équilibrées. Considérons une élection équilibrée $E' = (X', N', P')$ pour D-minimax, avec $|X'| = m'$, $|N'| = n'$ et un entier k'. Nous construisons une élection équilibrée E pour $AV_{w(n-i)}$ avec $X = X'$, $N = i \cdot N'$ et $P = i \cdot P'$, ce qui signifie que nous créons i copies de chaque votant de N'. Enfin, nous posons $k = i \cdot k'$. Il est facile de voir que E est aussi une élection équilibrée. Nous affirmons que la réponse est positive pour D-minimax si et seulement si la réponse est positive pour D-$AV_{w(n-i)}$. Pour démontrer cela, il suffit de montrer que le score $O_{w(n-i)}$ d'un comité c dans E est égal à i fois son score minimax dans E'. En effet, pour chaque votant de N' avec un distance de Hamming de h à c, il existe i votants dans N avec la même distance h à c. $\square$

Finalement, nous montrons que pour tout i fixé, $i \geq 1$, le problème de décision associé à $AV_{w(i)}$ est NP-complet.

Théorème 4. *Pour tout entier i fixé, $i \geq 1$, D-$AV_{w(i)}$ est NP-complet, même pour les élections équilibrées.*

Preuve. Le problème est clairement dans NP. La preuve est basée sur une réduction générale depuis D-$AV_{w(n-i)}$ vers D-$AV_{w(i)}$, pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Considérons une élection équilibrée E' pour D-$AV_{w(n-i)}$, $E' = (X', N', P')$ avec $|X'| = m'$, $|N'| = n'$ et un entier k'. Nous construisons une élection équilibrée E pour D-$AV_{w(i)}$ avec $X = X'$, $N = N'$, $P = \bar{P}'$, où $\bar{P}'$ est le profil complémentaire de P', c'est-à-dire le profil composé des votes complémentaires de ceux de P'. On pose aussi $k = m \cdot (\frac{n}{2} - i) + k'$. Il est facile de voir que E reste équilibrée puisque P est le profil complémentaire de P'. Nous affirmons que la réponse pour D-$AV_{w(n-i)}$ est positive si et seulement si la réponse pour D-$AV_{w(i)}$ est positive.

Étudions alors le score $O_{w(n-i)}$ d'un comité c dans E', qui est $w(n-i) \times H^{\downarrow}(c, \bar{P})$, et comparons-le à son score $O_{w(i)}$ dans E, qui est $w(i) \times H^{\downarrow}(c, P)$. Plus précisement, montrons que le score $O_{w(i)}$ dans E d'un comité c est égal à son score $O_{w(n-i)}$ dans E' plus le terme $m \cdot (\frac{n}{2} - i)$. Considérons un comité $c \subseteq X$. Puisque E est une élection équilibrée, chaque candidat (appartenant à c ou non) augmente le score minisum de c de $\frac{n}{2}$. Ainsi, le score minisum de c est $m \cdot \frac{n}{2}$. Le score minisum est donc le même pour tout comité $c \subseteq X$. Or, le score minisum peut s'écrire :

$$minisum(c, P) = \sum_{k=1}^{n} H^{\downarrow}(c, P)_k = \sum_{k=1}^{n-i} H^{\downarrow}(c, P)_k + \sum_{k=n-i+1}^{n} H^{\downarrow}(c, P)_k$$

Ceci est équivalent à :

$$m \cdot \frac{n}{2} = w(i) \times H^{\downarrow}(c, P) + \sum_{k=1}^{n-i} H^{\downarrow}(c, P)_k \tag{3.5}$$

De plus, étant donné un vote d'approbation P_i d'un votant $i \in N$, nous avons :

$$H(c, P_i) = m - H(c, \bar{P}_i)$$

où $\bar{P}_i$ est le vote complémentaire de P_i. Ceci implique que :

$$\sum_{k=n-i+1}^{n} H^{\downarrow}(c, P)_k = \sum_{k=1}^{i} (m - H^{\downarrow}(c, \bar{P})_k)$$

car les votants qui correspondent aux i dernières coordonnées de $H^{\downarrow}(c, P)$, correspondent aux i premières coordonnées de $H^{\downarrow}(c, \bar{P})$. Ainsi, nous obtenons :

$$\sum_{k=n-i+1}^{n} H^{\downarrow}(c, P)_k = i \cdot m - w(n-i) \times H^{\downarrow}(c, \bar{P}) \tag{3.6}$$

Les équations 3.5 et 3.6 conduisent alors à :

$$m \cdot \frac{n}{2} = w(i) \times H^{\downarrow}(c, P) + i \cdot m - w(n-i) \times H^{\downarrow}(c, \bar{P})$$

Ceci est équivalent à :

$$w(i) \times H^{\downarrow}(c, P) = m \cdot (\frac{n}{2} - i) + w(n-i) \times H^{\downarrow}(c, \bar{P})$$

Ainsi, le score $O_{w(i)}$ dans E d'un comité c est égal à son score $O_{w(n-i)}$ dans E' plus le terme $m \cdot (\frac{n}{2} - i)$. La réponse pour D-$AV_{w(n-i)}$ est donc positive si et seulement si la réponse pour D-$AV_{w(i)}$ est positive. □

Ainsi, pour une famille de règles simples (vecteurs de poids binaires) mais tout de même plus équitable que minisum (vecteurs décroissants), nous avons montré que le calcul d'un comité vainqueur devient NP-difficile. Nous conjecturons que ce résultat de complexité se généralise à tous les AV_w tels que w est décroissant et diffère de minisum.

Nous terminons cette section en mentionnant que des résultats complémentaires de ceux que nous venons d'établir, mais qui concernent cette fois la détermination d'un comité optimal *de cardinalité donnée*, ont été obtenus par Amanatidis et al. (2015). Dans cet article, nous montrons que si la taille du comité est fixée (mais n'est pas une constante indépendante du profil) alors le problème est NP-difficile, pour les vecteurs de type $w(i)$. Bien sûr si la taille du comité est une constante, k, indépendante du profil d'approbations, le problème est polynomial car il existe un nombre polynomial de comités admissibles, $\binom{n}{k}$. De plus nous étudions l'approximation des règles $AV_w(i)$ par l'utilisation de la programmation linéaire avec laquelle nous obtenons un ratio d'approximation de valeur 2, et l'approximation des règles à vecteurs décroissants par la règle de minisum avec laquelle nous obtenons un ratio d'approximation de valeur 3.

3.3.2.b Pour les règles $AV_{q(i)}$

Une famille intéressante de vecteurs de poids est la famille définie par les vecteurs $q(i) = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$, où le 1 correspond à la i^e coordonnée, pour $i = 1, \dots, n$. Cette famille correspond à des opérateurs de type quantile, et modélise des règles de votes entre *minimin*[1] (correspondant à $q(1)$) et minimax (correspondant à $q(n)$).

Tout d'abord, remarquons que le calcul d'un comité vainqueur pour la règle $q(n)$ s'effectue en temps polynomial puisque cette règle est minimin. En effet, pour obtenir un comité vainqueur pour minimin, il suffit de choisir un des votes comme comité vainqueur. Mais $q(n)$ n'est pas la seule règle de cette famille pour laquelle le calcul d'un comité vainqueur s'effectue en temps polynomial. En effet, déterminer un comité vainqueur pour $AV_{q(n-i)}$ s'effectue en temps polynomial pour tout i fixé.

1. De façon analogue à minimax, la règle minimin élit un comité qui minimise la distance de Hamming *minimum* avec le profil.

Proposition 3.10. *Pour tout i fixé, déterminer un comité vainqueur pour $AV_{q(n-i)}$ s'effectue en temps polynomial.*

Preuve. La preuve est basée sur une réduction de $AV_{q(n-i)}$ vers $\binom{n}{i+1}$ problèmes de type minimax avec $i+1$ votants chacun.

Étant donné une instance I de $AV_{q(n-i)}$, pour chaque sous-ensemble de $i+1$ votants $(v_1, \ldots, v_{i+1})$, nous construisons une instance $I_{(v_1,..,v_{i+1})}$ de minimax. Nous définissons $I_{(v_1,..,v_{i+1})}$ avec $X_{(v_1,..,v_{i+1})} = X$, $V_{(v_1,..,v_{i+1})} = \{v_1, .., v_{i+1}\}$, $P_{(v_1,..,v_{i+1})} = \{P_{v_1}, .., P_{v_{i+1}}\}$. Cela signifie que l'instance $I_{(v_1,..,v_{i+1})}$ correspond à un problème de minimax avec seulement $i+1$ votants, $(v_1, \ldots, v_{i+1})$. Nous notons $c_{(v_1,..,v_{i+1})}$ un comité vainqueur pour une instance de $I_{(v_1,..,v_{i+1})}$ de minimax. Comme il a été montré par Gramm et al. 2003 que minimax est un problème facile lorsque le nombre de votants est fixé, nous pouvons calculer en temps polynomial un comité vainqueur pour chacune des instances $I_{(v_1,..,v_{i+1})}$. Soit c^* un comité avec le score minimax sur $P_{(v_1,..,v_{i+1})}$ le plus petit parmi les comités vainqueurs $(c_{(v_1,..,v_{i+1})})$, $(v_1, .., v_{i+1}) \in V^{i+1}$. Pour la suite de la preuve, $(v_1, .., v_{i+1})$ représente le sous-ensemble de votants associé au comité c^*, c'est-à-dire $c^* = c_{(v_1,..,v_{i+1})}$.

Nous affirmons que c^* est un comité vainqueur pour $AV_{q(n-i)}$ sur le profil P. Par contradiction, supposons qu'il existe un comité c' tel que le score $AV_{q(n-i)}$ de c' soit strictement meilleur que celui de c^* :

$$H^{\downarrow}(c', P)_{n-i} < H^{\downarrow}(c^*, P)_{n-i} \tag{3.7}$$

Soit $(v'_1, .., v'_{i+1})$, les votants associés aux $(i+1)$ dernières coordonnées du vecteur $H^{\downarrow}(c', P)$. Alors, on a

$$H^{\downarrow}(c', P_{(v'_1,..,v'_{i+1})})_{n-i} = H^{\downarrow}(c', P)_{n-i}$$

De plus, nous savons que

$$H^{\downarrow}(c^*, P_{(v_1,..,v_{i+1})})_{n-i} \geq H^{\downarrow}(c^*, P)_{n-i}$$

À partir de ces deux équations et de l'équation 3.7, nous obtenons

$$H^{\downarrow}(c', P_{(v'_1,..,v'_{i+1})})_{n-i} < H^{\downarrow}(c^*, P_{(v_1,..,v_{i+1})})_{n-i}$$

Ce résultat contredit la définition de c^*. □

Cependant, en s'intéressant aux règles $AV_{w(i)}$, on remarque que le calcul d'un comité vainqueur devient NP-difficile. En effet, le problème de décision associé à $AV_{q(i)}$ est NP-complet, pour tout i fixé, $i \geq 1$:

Théorème 5. *Pour tout i fixé, $i \geq 1$, le problème de décision associé à $AV_{q(i)}$ est NP-complet.*

Preuve. Notre preuve est basée sur une réduction depuis le problème de calcul d'un comité vainqueur pour minimax. Considérons une élection $E' = (X', N', P')$ pour minimax, avec $|X'| = m'$, $|N'| = n'$, et un entier k'. Nous construisons une élection E pour $AV_{q(i)}$ avec $X = X'$, $N = i \cdot N'$, $P = i \cdot P'$, c'est-à-dire que nous créons i copies de chaque votant de N'. Enfin, nous posons $k = k'$. Nous affirmons alors que le score $O_{q(i)}$ d'un comité c dans E est exactement son score minimax dans E'. Clairement pour chaque votant dans N' avec une distance de Hamming de h avec c, il existe i votants dans N avec la même distance de Hamming h avec c. □

L'étude des vecteurs de type quantile, $q(i)$, nous a conduit à un résultat intéressant : déterminer un comité vainqueur est facile pour $AV_{q(n-i)}$, mais cela est NP-difficile pour $AV_{q(i)}$, pour i fixé, $i \geq 1$.

3.3.3 Résumé

Cette section porte sur la complexité du calcul d'un comité vainqueur pour les règles AV_w.

Tout d'abord, nous nous sommes intéressés à un sous-ensemble simple de cette famille, les $AV_{w(i)}$. Nous avons étudié certaines propriétés associées aux comités vainqueurs de ces règles, et en particulier une condition suffisante pour qu'un candidat soit dans l'ensemble des comités vainqueurs.

Puis, ces propriétés nous ont permis de démontrer que le calcul d'un comité vainqueur est polynomial pour la règle $AV_{w(1)}$ avec un nombre impair de votants. Mais dans le cas général, nous avons obtenu que la détermination d'un comité vainqueur pour une règle $AV_{w(i)}$ est NP-difficile, même lorsque i est fixé. De plus, pour les règles $AV_{w(n-i)}$, le calcul d'un comité est NP-difficile, même lorsque i est fixé.

Enfin, l'étude des vecteurs de type quantile, $q(i)$, conduit à un résultat intéressant : déterminer un comité vainqueur est facile pour $AV_{q(n-i)}$, mais cela est NP-difficile pour $AV_{q(i)}$, pour i fixé, $i \geq 1$.

3.4 Manipulation

3.4.1 Introduction

Dans cette section, nous étudions la manipulation des règles AV_w, pour des vecteurs de poids monotones.

Comme nous l'avons observé en section 2.5.2.a, une première difficulté est que pour savoir si un vote est une manipulation, il faut connaître les préférences des votants sur tous les comités. Or, cette information ne figure pas dans les données du problème. Nous n'aurons cependant jamais besoin de spécifier les préférences des votants *in extenso*. Il suffira, dans tous les cas, de faire l'hypothèse (cohérente avec le choix de notre famille de règles) que plus la distance de Hamming d'un comité au comité optimal du votant est faible, plus le votant apprécie ce comité. De telles préférences sont dites *Hamming-cohérentes*. Formellement : pour tout $A, B \subseteq X$, si $H(A, P_i) < H(B, P_i)$ alors $A \succ_i B$, c'est-à-dire, i préfère A à B. Cela ne dit rien sur les préférences de i entre A et B lorsque $H(A, P_i) = H(B, P_i)$, mais nous n'en aurons jamais besoin. L'exemple 2.10, dans la section des préliminaire, illustre la notion de Hamming-cohérence. Enfin, dans certains cas, il suffira d'une hypothèse plus faible sur les préférences des votants, à savoir que le votant i a un unique comité préféré P_i.

Ensuite, remarquons que, jusqu'ici, nous avons considéré les règles AV_w comme des règles *non-déterministes*, ou *irrésolues*, c'est-à-dire des règles dont le résultat est un ensemble non-vide de comités vainqueurs. Pour l'étude de la manipulabilité, la question de savoir si nous continuons à les considérer comme des règles non-déterministes ou, au contraire, comme des règles déterministes (ou résolues), joue un rôle important. Nous considérons trois façons de faire, qui seront mises en application en section 3.4.2 :

1. On "déterminise" les règles à l'aide d'un mécanisme de départage des ex aequo : une règle de vote déterministe pour le vote par approbation avec OWA s'obtient par la composition d'une règle AV_w non-déterministe et d'un mécanisme de départage des ex aequo T. La règle déterministe obtenue est notée AV_w^T. Typiquement, afin de préserver l'anonymat, le mécanisme de départage des ex aequo est une règle de priorité sur l'ensemble des comités possibles. Ainsi, dans le cas où il existe plusieurs comités avec un score minimal, le comité renvoyé par la règle déterministe AV_w^T est le comité le plus prioritaire (suivant T) parmi les comités vainqueurs.

2. On "cardinalise" les préférences, en faisant l'hypothèse que l'utilité d'un comité pour un agent correspond (à une constante près) à l'opposé de sa distance de Hamming avec son comité optimal (cette hypothèse est bien entendu plus forte que la Hamming-cohérence).

3. On garde des règles non-déterministes, mais on utilise alors un *principe d'extension* qui permet d'étendre les préférences des votants sur des comités à des ensembles (non-vides) de comités.

Une règle de vote déterministe est dite *manipulable* si un votant peut modifier le résultat de l'élection en sa faveur, en n'exprimant pas ses préférences sincères : formellement, une manipulation d'une règle F par un votant i est un bulletin P'_i tel que $F(P \cup \{P'_i\} \backslash \{P_i\}) \succ_i F(P)$, où $(P \cup \{P'_i\} \backslash \{P_i\})$ est le profil obtenu à partir de P en remplaçant le vote sincère P_i du votant i par son vote manipulateur P'_i. Une règle déterministe F est manipulable s'il existe un profil P pour lequel il existe une manipulation.

D'après Brams et al. (2007a), nous savons déjà que minimax est manipulable et que minisum ne l'est pas. Comment cela s'étend-il aux règles AV_w en général ? Dans un premier, nous étudierons les règles définies par des vecteurs de poids décroissants (pour des raisons d'équité). Puis, dans un second temps, nous intéresserons à la question de savoir si minisum est bien la seule de ces règles avec un vecteur monotone à être non manipulable, en étudiant aussi les règles basées sur des vecteurs de poids croissants.

Pour alléger les notations de cette section, nous introduisons les notations suivantes. Pour un comité c, nous noterons $D(c) = w \times H^{\downarrow}(c, P)$, c'est-à-dire que nous ne préciserons pas le profil P, ni le vecteur w. De plus, si $i \leq j$, nous définissons $W_{i \to j} = \sum_{k=i+1}^{j} w_i$ et $W_{j \to i} = -W_{i \to j}$ et enfin $W_{i \to i} = 0$. Finalement, $(2^p\ 1^q\ 0^r)$ désigne le vecteur qui commence avec p coordonnées à 2, puis q coordonnées à 1 et enfin $r = n - p - q$ coordonnées à 0.

3.4.2 Minimax avec deux candidats

Dans cette section, nous étudierons la manipulation de minimax, noté MMA, avec deux candidats, en considérant chacune des trois possibilités énoncées dans la section précédente.

Tout d'abord, étudions MMA^T, la règle de vote minimax déterministe obtenue par un mécanisme de départage T, c'est-à-dire une relation de préférence sur les comités. Étant donné un profil d'approbations P, nous notons $MMA(P)$ l'ensemble des comités vainqueurs de minimax sur P et $MMA^T(P)$ le comité élu après départage.

Proposition 3.11. *MMA^T est manipulable pour $m = 2$.*

Preuve. Considérons une règle de départage T telle que $01 >_T 00 >_T 11$ et le profil d'approbations $P = (00, 01)$. On obtient $MMA^T(P) = 01$. Maintenant si le premier votant modifie son vote en 10, le profil devient $P' = (10, 01)$. Alors $MMA^T(P') = 00$ et ce votant préfère 00 à 01. □

Considérons maintenant l'hypothèse que les préférences des votants sont cardinales. Étudions MMA^R, qui désigne la règle de vote obtenue à l'aide de minimax et de la règle de départage randomisée munie d'une probabilité uniforme. Supposons que l'utilité d'un votant qui a pour vote préféré x, lorsque le résultat de l'élection est y, est $2 - H(x, y)$. L'utilité espérée du votant 1, noté $\overline{u_1}(P)$, avec 00 comme vote préféré, lorsqu'il vote sincèrement est

$$\overline{u_1}(P) = \frac{1}{|MMA(P)|} \sum_{y \in MMA(P)} 2 - H(00, y).$$

Proposition 3.12. *MMA^R est non manipulable pour $m = 2$.*

Preuve. Soit P un profil d'approbations. Sans perte de généralité, supposons que le votant 1 possède $v_1 = 00$ comme vote préféré et qu'il soit le seul votant à voter 00 (sinon 1 n'est pas un votant pivot, et changer son vote ne change pas le résultat de l'élection). Le résultat dépend seulement du sous-ensemble de votes Σ qui ont été choisis par au moins un des votants. Puisque $v_1 = 00$, il y a 8 possibilités. Si $\Sigma = \{00\}$ ou $\Sigma = \{00, 01, 10\}$ alors le résultat est 00 avec une probabilité de 1, et le votant 1 n'a aucun intérêt à manipuler. Il reste alors six cas.

1. $\Sigma = \{00, 01\}$. Le résultat est alors 00 ou 01 avec une probabilité identique, et on a $\overline{u_1}(P) = \frac{3}{2}$. Si le votant 1 vote 01, alors le résultat est 01 et $\overline{u_1}(P') = 1$. S'il vote 10, alors le résultat est 00 ou 11 avec une probabilité identique et $\overline{u_1}(P') = \frac{0+2}{2} = 1$. S'il vote 11, le résultat est 01 ou 11 avec une probabilité identique et $\overline{u_1}(P') = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

2. $\Sigma = \{00, 10\}$. Par symétrie, le raisonnement est le même que dans le cas précédant.

3. $\Sigma = \{00, 11\}$. Le résultat est 01 ou 10 avec une probabilité identique et $\overline{u_1}(P) = 1$. S'il vote 01, le résultat est 01 ou 11 et $\overline{u_1}(P') = \frac{1}{2}$. S'il vote 10 alors le résultat est 10 ou 11 et $\overline{u_1}(P') = \frac{1}{2}$. S'il vote 11 alors le résultat est 11 et $\overline{u_1}(P') = 0$.

4. $\Sigma = \{00, 01, 11\}$. Le résultat est 01 et $\overline{u_1}(P) = 1$. S'il vote 01 alors le résultat est 01 ou 11 et $\overline{u_1}(P') = \frac{1}{2}$. S'il vote 10 alors le résultat est 11 et $\overline{u_1}(P') = 0$. S'il vote 11 alors le résultat est 01 ou 11 et $\overline{u_1}(P') = \frac{1}{2}$.

5. $\Sigma = \{00, 10, 11\}$. Par symétrie, le raisonnement est le même que dans le cas précédent.

6. $\Sigma = \{00, 01, 10, 11\}$. Le résultat est 00, 01, 10 ou 11 avec une probabilité identique et $\overline{u_1}(P) = 1$. S'il vote 01, 10 ou 11 alors le résultat est 11 et $\overline{u_1}(P') = 0$.

$\square$

Examinons maintenant le cas des règles non-déterministes avec un principe d'extension des préférences entre comités à des préférences entre sous-ensembles non vides de comités. Nous allons considérer trois des cinq principes d'extensions classiques définis en section 2.5.2.b : le principe d'extension optimiste, pessimiste et celui de Gärdenfors. Nous ne considérerons pas les principes de Kelly et Fishburn parce que nous allons montrer que MMA avec le principe de Gärdenfors n'est pas manipulable, ce qui implique qu'il ne l'est pas non plus avec les deux autres.

Rappelons la définition de ces trois principes, présentés et illustrés par un exemple en section 2.5.1.b. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-ensembles non-vides de 2^X et $\succ_i$ la relation de préférence de i sur 2^X. Un principe d'extension transforme $\succ$ sur 2^X en une relation de préférence $\succ^E$ sur $2^{2^X} \setminus \emptyset$.

- principe d'extension optimiste : $\mathcal{A} \succ_i^O \mathcal{B}$ si et seulement si $\forall B \in \mathcal{B}, \exists A \in \mathcal{A}$ tel que $A \succ_i B$, ou, en d'autres termes, si le meilleur des éléments de $\mathcal{A}$ (selon la préférence du votant) est préféré au meilleur des éléments de $\mathcal{B}$.

- principe d'extension pessimiste : $\mathcal{A} \succ_i^P \mathcal{B}$ si et seulement si $\forall A \in \mathcal{A}, \exists B \in \mathcal{B}$ tel que $A \succ_i B$, ou, en d'autres termes, si le pire des éléments de $\mathcal{A}$ (selon la préférence du votant) est préféré au pire des éléments de $\mathcal{B}$.

- principe d'extension de Gärdenfors : $\mathcal{A} \succ_i^G \mathcal{B}$ si et seulement si (a) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ et $\forall A \in \mathcal{A}$ et $\forall B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ on a $A \succ_i B$, ou (b) $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ et $\forall A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ et $\forall B \in \mathcal{B}$ on a $A \succ_i B$, ou (c) $\forall A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ et $\forall B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ on a $A \succ_i B$.

Rappelons qu'une règle non-déterministe G est manipulable au sens de E s'il existe un profil P pour lequel il existe une manipulation par un votant i au sens de E.

Proposition 3.13. *MMA est non manipulable pour les trois principes d'extension P, O et G, pour $m = 2$.*

Preuve. La preuve, pour chacun des trois principes d'extension, examine les six mêmes cas que celle de la proposition 3.12.

Commençons par le principe d'extension optimiste.

1. $\Sigma = \{00, 01\}$. Alors le résultat contient 00, qui est le comité préféré du votant. Il ne peut donc pas exister de manipulation optimiste. Même raisonnement pour $\Sigma = \{00, 10\}$ et $\Sigma = \{00, 01, 10, 11\}$.
2. $\Sigma = \{00, 11\}$. Le résultat est $\{01, 10\}$. Une manipulation optimiste serait un vote tel que le résultat contienne 00. Or on a vu dans la preuve de la proposition 3.12 que ce n'est pas possible.
3. $\Sigma = \{00, 01, 11\}$. Le résultat est $\{01\}$. Si le votant change son vote, le résultat est soit $\{01, 11\}$, soit $\{11\}$, et nous n'avons ni $\{01, 11\} \succ_i^O \{01\}$, ni $\{01, 11\} \succ_i^O \{11\}$. Même raisonnement pour $\Sigma = \{00, 10, 11\}$.

Continuons par le principe d'extension pessimiste.

1. $\Sigma = \{00, 01\}$. Après manipulation, le résultat est $\{01\}$, $\{00, 11\}$ ou $\{01, 11\}$, et nous n'avons ni $\{01\} \succ_i^P \{00, 01\}$ (le pire des comités, à savoir 01, ne change pas) ni $\{00, 11\} \succ_i^P \{00, 01\}$, ni $\{00, 11\} \succ_i^P \{01, 01\}$ (le pire des comités après manipulation serait 11, donc pire qu'avant manipulation). Même raisonnement pour $\Sigma = \{00, 10\}$, $\Sigma = \{00, 11\}$, $\Sigma = \{00, 01, 11\}$ et $\Sigma = \{00, 10, 11\}$.
2. $\Sigma = \{00, 01, 10, 11\}$. Le résultat est $\{00, 01, 10, 11\}$, qui contient le pire des comités pour i, qui est (11). Mais on a vu que si i vote différemment, le résultat contiendra toujours 11.

Enfin, le principe d'extension de Gärdenfors. Si $\Sigma = \{00, 01\}$, le résultat est alors $\{00, 01\}$. Après manipulation, le résultat est $\{01\}$, $\{00, 11\}$ ou $\{01, 11\}$, et nous n'avons ni $\{01\} \succ_i^G \{00, 01\}$ (il faudrait pour cela que 01 soit préféré à 00), ni $\{00, 11\} \succ_i^G \{00, 01\}$ (il faudrait que 11 soit préféré à 01), ni $\{01, 11\} \succ_i^G \{00, 01\}$ (il faudrait que 11 soit préféré à 00). Le raisonnement pour tous les autres cas est similaire. $\square$

En résumé, nous avons montré que minimax est manipulable lorsqu'elle est résolue par un mécanisme de départage des ex aequo. Cependant, avec deux candidats, minimax n'est pas manipulable lorsqu'on la considère irrésolue à l'aide d'un principe d'extension optimiste, pessimiste et de Gärdenfors.

3.4.3 AV_w résolue par un mécanisme de départage des ex aequo

Maintenant, étudions les règles AV_w pour des vecteurs de poids w monotones. Dans toute cette section, nous ferons le choix de considérer ces règles comme résolues en les déterminisant à l'aide d'un mécanisme de départage des ex aequo. Pour conserver l'anonymat, les mécanismes de départage sont des relations de priorités sur les comités. En fait, nous ferons l'hypothèse qu'il s'agit d'ordre linéaire sur les comités.

Tout d'abord, précisons qu'une règle r résolue par un mécanisme de départage est dite manipulable au sens fort si il existe une manipulation qui ne dépend pas de la règle de départage. Illustrons cette notion avec un exemple de vecteur w pour lequel AV_w est manipulable au sens fort, c'est-à-dire, indépendamment d'une règle de départage.

Exemple 3.5. *Soit* $w = (2, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$*. Soit* P *un profil composé de 3 votes* 00 *et 4 votes* 01*. Nous avons* $H^{\downarrow}(00) = (1111000)$*,* $H^{\downarrow}(01) = (1110000)$*,* $H^{\downarrow}(10) = (2222111)$*,* $H^{\downarrow}(11) = (2221111)$*. Cela nous donne* $D(00) = 5$*,* $D(01) = 4$*,* $D(10) = 10$ *et* $D(11) = 9$*. Le comité vainqueur est donc* 01*. Supposons maintenant qu'un votant* 00 *change son vote en* 10*. Nous avons alors* $H^{\downarrow}(00) = (1111100)$*,* $H^{\downarrow}(01) = (2110000)$*,* $H^{\downarrow}(10) = (2222110)$*,* $H^{\downarrow}(11) = (221111)$*, ce qui donne* $D(00) = 5$*,* $D(01) = 6$*,* $D(10) = 10$ *et* $D(11) = 8$*. Le comité vainqueur est alors* 00 *et la manipulation est réussie.*

3.4.3.a Nombre de votants pair et w décroissant

Dans les deux sections qui suivent, nous nous intéresserons à des vecteurs de poids décroissants. Dans ce cas, nous n'aurons pas besoin de faire l'hypothèse que les préférences des votants sont Hamming-cohérentes. Il sera simplement nécessaire de supposer que chaque votant possède un comité préféré unique.

Nous étudierons, dans un premier temps, le cas où le nombre de votants est pair, puis dans second temps le cas où ce nombre est impair, car ces deux cas conduisent à des résultats légèrement différents.

Tout d'abord commençons par donner un exemple de règle AV_w manipulable au sens faible, c'est-à-dire, à l'aide d'un mécanisme de départage des ex aequo.

Exemple 3.6. *Nous considérons un nombre pair* $n = 2q$ *de votants, le profil* P *est composé de* q *vote* 00 *et de* q *votes* 01*. Le mécanisme de départage favorise* 01 *sur* 00*, et* 00 *sur* 11*. Soit* w *tel que* $w_1 > w_{q+1}$*. Nous avons*

$$\begin{array}{ll}
H^{\downarrow}(00) = (1^q0^q) & D(00) = W_{0\to q} \\
H^{\downarrow}(01) = (1^q0^q) & D(01) = W_{0\to q} \\
H^{\downarrow}(10) = (2^q1^q) & D(10) = 2W_{0\to q} + W_{q\to n} \\
H^{\downarrow}(11) = (2^q1^q) & D(11) = 2W_{0\to q} + W_{q\to n}
\end{array}$$

Le vainqueur est 01 *grâce au mécanisme de départage.*

Maintenant, supposons qu'un des votants 00 *change son vote pour* 10. *Alors la situation devient*

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (1^{q+1}0^{q-1}) & D(00) = W_{0\to q+1} \\ H^{\downarrow}(01) = (2\ 1^{q-1}0^{q}) & D(01) = 2w_1 + W_{1\to q} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q}1^{q-1}0) & D(10) = 2W_{0\to q} + W_{q\to n-1} \\ H^{\downarrow}(11) = (2^{q-1}1^{q+1}) & D(11) = 2W_{0\to q-1} + W_{q-1\to n} \end{array}$$

Clairement $D(00) < D(10)$. *Si* $q > 1$, *nous avons* $D(00) < D(11)$, *et si* $q = 1$, *alors* $D(00) = D(11)$, *et le mécanisme de départage des ex aequo privilégie* 00 *face à* 11. *De plus, nous avons* $D(01) - D(00) = w_1 - w_{q+1}$. *Ainsi le comité vainqueur est* 00 *et la manipulation fonctionne.*

Maintenant, nous généralisons cet exemple pour démontrer la manipulation des règles AV_w paramétrées par tout vecteur décroissant avec un nombre pair de votants.

Exemple 3.7. *Nous avons un nombre pair* $n = 2q$ *de votants et un entier* $\alpha \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha < q$. *Le profil* P *est composé de* $(q - \alpha)$ *votes* 00, α *votes* 10 *et* q *votes* 01. *De plus le mécanisme de départage* T *privilégie* 01 *sur* 00 *et* 00 *sur* 11. *Soit le vecteur de poids* w *tel que* $W_{0\to\alpha} \leq W_{q\to q+\alpha}$ *(en fait,* $W_{0\to\alpha} = W_{q\to q+\alpha}$, *car* w *est décroissant) et* $W_{0\to\alpha+1} > W_{q\to q+\alpha+1}$. *Nous avons*

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (1^{q+\alpha}0^{q-\alpha}) & D(00) = W_{0\to q+\alpha} \\ H^{\downarrow}(01) = (2^{\alpha}1^{q-\alpha}0^{q}) & D(01) = 2W_{0\to\alpha} + W_{\alpha\to q} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q}1^{q-\alpha}0^{\alpha}) & D(10) = 2W_{0\to q} + W_{q\to 2q-\alpha} \\ H^{\downarrow}(11) = (2^{q-\alpha}1^{q+\alpha}) & D(11) = 2W_{0\to q-\alpha} + W_{q-\alpha\to 2q} \end{array}$$

Clairement, pour $0 \leq \alpha < q$, *nous avons* $D(00) < D(11)$ *et* $D(01) < D(10)$. *De plus, nous avons* $D(01) - D(00) = W_{0\to\alpha} - W_{q\to q+\alpha}$. *Le comité vainqueur est donc* 01 *grâce au mécanisme de départage.*

Supposons maintenant qu'un votant 00 *transforme son vote en* 10. *Nous obtenons*

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (1^{q+\alpha+1}0^{q-\alpha-1}) & D(00) = W_{0\to q+\alpha+1} \\ H^{\downarrow}(01) = (2^{\alpha+1}1^{q-\alpha-1}0^{q}) & D(01) = 2W_{0\to\alpha+1} + W_{\alpha+1\to q} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q}1^{q-\alpha-1}0^{\alpha+1}) & D(10) = 2W_{0\to q} + W_{q\to 2q-\alpha-1} \\ H^{\downarrow}(11) = (2^{q-\alpha-1}1^{q+\alpha+1}) & D(11) = 2W_{0\to q-\alpha-1} + W_{q-\alpha-1\to 2q} \end{array}$$

Pour $0 \leq \alpha < q$, *nous avons* $D(00) < D(10)$. *Si* $\alpha < q - 1$, $D(00) < D(11)$, *et si* $\alpha = q - 1$ *alors* $D(00) = D(11)$, *et le mécanisme de départage privilégie* 00. *De plus, nous avons* $D(01) - D(00) = W_{0\to\alpha+1} - W_{q\to q+\alpha+1}$. *La vainqueur est donc* 00 *et la manipulation fonctionne.*

Cet exemple reste valide pour tout entier q et, par symétrie, pour tout mécanisme de départage T défini par un ordre linéaire sur les comités. De plus, ce résultat s'étend à n'importe quel nombre de candidats en ajoutant des candidats factices approuvés (ou rejetés) de façon unanime. Ainsi, nous concluons :

Proposition 3.14. *Si $n = 2q$, w est décroissant et s'il existe α tel que $W_{0\to\alpha} = W_{q\to q+\alpha}$ et $W_{0\to\alpha+1} > W_{q\to q+\alpha+1}$, $0 \leq \alpha < q$, alors, pour tout m, AV_w^T est manipulable.*

Remarquons que, lorsque $\alpha = 0$ dans la proposition 3.14, le vecteur de poids w doit seulement être tel que $w_1 > w_{q+1}$ pour obtenir une règle manipulable. Cela implique que

Proposition 3.15. *Si $n = 2q$, w est décroissant et s'il existe α tel que $w_1 > w_\alpha$, pour $1 < \alpha \leq q+1$, alors, pour tout m, AV_w^T est manipulable.*

Les propositions 3.14 et 3.15 nous permettent de conclure sur la manipulation des AV_w pour tout w décroissant et pour nombre de votants pair.

Proposition 3.16. *Si n est pair et w est décroissant et diffère du vecteur de poids de minisum, alors, pour tout m, AV_w^T est manipulable.*

Ce résultat implique de façon évidente que toute règle AV_w^T paramétrée par un vecteur strictement décroissant est manipulable.

Corollaire 3.1. *Si n est pair et w est strictement décroissant, alors, pour tout m, AV_w^T est manipulable.*

3.4.3.b Nombre de votants impair et w décroissant

Étudions maintenant comment ce résultat s'étend à un nombre impair de votants. Certains exemples dont le principe est le même qu'en section précédente seront reversés dans la partie annexe. Nous commençons par donner un exemple de AV_w manipulable avec un nombre impair de votants au sens faible, c'est-à-dire, dépendant d'un mécanisme de départage des ex aequo.

Exemple 3.8. *Nous considérons un nombre impair $n = 2q+1$ de votants, avec un profil P composé de q votes 00 et de $q+1$ votes 01. Le mécanisme de départage privilégie 01 sur 00 et 00 sur 11. Soit w décroissant tel que $w_1 > w_{q+1} + w_{q+2}$. Nous avons*

$$
\begin{array}{ll}
H^{\downarrow}(00) = (1^{q+1}0^{q}) & D(00) = W_{0\to q+1} \\
H^{\downarrow}(01) = (1^{q}0^{q+1}) & D(01) = W_{0\to q} \\
H^{\downarrow}(10) = (2^{q+1}1^{q}) & D(10) = 2W_{0\to q+1} + W_{q+1\to 2q+1} \\
H^{\downarrow}(11) = (2^{q}1^{q+1}) & D(11) = 2W_{0\to q} + W_{q\to 2q+1}
\end{array}
$$

Alors le comité vainqueur est 01, grâce au mécanisme de départage si $w_{q+1} = 0$.

Supposons maintenant qu'un votant 00 change son vote en 10. Alors nous obtenons

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (1^{q+2}0^{q-1}) & D(00) = W_{0\to q+2} \\ H^{\downarrow}(01) = (2\ 1^{q-1}0^{q+1}) & D(01) = 2w_1 + W_{1\to q} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q+1}1^{q-1}0) & D(10) = 2W_{0\to q+1} + W_{q+1\to 2q} \\ H^{\downarrow}(11) = (2^{q-1}1^{q+2}) & D(11) = 2W_{0\to q-1} + W_{q-1\to 2q+1} \end{array}$$

Clairement, nous avons $D(00) < D(10)$. Si $q > 1$, nous avons $D(00) < D(11)$, et si $q = 1$, alors nous avons $D(00) = D(11)$ et le mécanisme favorise 00 face à 11. De plus, nous avons $D(01) - D(00) = w_1 - (w_{q+1} + w_{q+2}) > 0$. Le vainqueur est donc 00 et la manipulation fonctionne.

De façon similaire au cas avec un nombre pair de votant, nous pouvons généraliser l'exemple précédent pour traiter l'ensemble des vecteurs décroissant avec un nombre de votants impair. L'exemple généralisé se trouve en annexe, exemple 6.1.

De même, cet exemple reste valide pour tout entier q et, par symétrie, pour tout mécanisme de départage T, défini par un ordre linéaire sur les comités. De plus, ce résultat s'étend à n'importe quel nombre de candidats en ajoutant des candidats factices approuvés (ou rejetés) de façon unanime. Ainsi, nous concluons :

Proposition 3.17. *Si $n = 2q + 1$, w est décroissant et s'il existe un entier α tel que $W_{0\to\alpha} \leq W_{q\to q+\alpha+1}$ et $W_{0\to\alpha+1} > W_{q\to q+\alpha+2}$, $0 \leq \alpha < q$, alors, pour tout m, AV_w^T est manipulable.*

Remarquons que l'on peut adapter le mécanisme de départage de cet exemple pour montrer la propriété suivante :

Proposition 3.18. *Si $n = 2q + 1$, w est décroissant et s'il existe un entier α tel que $W_{0\to\alpha} < W_{q\to q+\alpha+1}$ et $W_{0\to\alpha+1} \geq W_{q\to q+\alpha+2}$, $0 \leq \alpha < q$, alors, pour tout m, AV_w^T est manipulable.*

De plus si nous avons $\alpha < q-1$, $W_{0\to\alpha} < W_{q\to q+\alpha+1}$ et $W_{0\to\alpha+1} > W_{q\to q+\alpha+2}$, l'exemple 6.1 est indépendant de tout mécanisme de départage des ex aequo. Nous obtenons alors :

Proposition 3.19. *Si $n = 2q + 1$, w est décroissant et s'il existe un entier α tel que $W_{0\to\alpha} < W_{q\to q+\alpha+1}$ et $W_{0\to\alpha+1} > W_{q\to q+\alpha+2}$, $0 \leq \alpha < q-1$, alors, pour tout m, AV_w^T est fortement manipulable.*

Cependant, contrairement au cas où le nombre de votants est pair, il existe des vecteurs de poids décroissants w qui sont différents du vecteur de poids de minisum (mais relativement proche) et qui induisent une règle AV_w non manipulable. En fait, lorsque le vecteur de poids w est assez proche de celui de minisum et que le nombre de votants est impair, la règle AV_w et la règle minisum produisent toujours le même résultat. La règle AV_w est alors équivalente à minisum et par conséquent non manipulable.

Avant d'étudier les vecteurs de poids qui sont proches de minisum, considérons la propriété technique suivante.

Proposition 3.20. *Considérons un ensemble de n entiers $\{a_i,\ i = 1 \dots n\}$, avec n impair, tels que $-\alpha \leq a_i \leq \alpha$, et $\sum_{i=1}^{n} a_i = -\alpha$, ainsi qu'un vecteur décroissant de taille n, $w = \langle w_i,\ i = 1 \dots n\rangle$, alors nous avons $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_i \leq \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} w_i \cdot \alpha - \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n} w_i \cdot \alpha$.*

Preuve. Considérons un ensemble de n entiers $\{a_i,\ i = 1 \dots n\}$, avec n impair, tels que $-\alpha \leq a_i \leq \alpha$, et $\sum_{i=1}^{n} a_i = -\alpha$, ainsi qu'un vecteur décroissant $w = \langle w_i,\ i = 1 \dots n\rangle$. Cherchons une borne supérieur de la somme $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_i$.

Remarquons d'abord que, dans le but d'obtenir une borne supérieur pour $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_i$, les a_i positifs doivent être associés aux plus grands w_i disponibles, et les a_i négatifs aux plus petits w_i disponibles.

Maintenant, supposons qu'il existe dans la borne supérieure, deux entiers a_{i_1} et a_{i_2} tels que $0 < a_{i_1} < \alpha$, $0 < a_{i_2} < \alpha$ et $i_1 < i_2$. Alors nous définissons $\{a'_i,\ i = 1 \dots n\}$ tel que $a'_{i_1} = \min\{\alpha; a_{i_1} + a_{i_2}\}, a'_{i_2} = \max\{0; a_{i_2} - (\alpha - a_{i_1})\}$, et $a'_i = a_i$, pour $i \notin \{i_1, i_2\}$. Puisque w est décroissant, nous avons $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_i \leq \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a'_i$.

De façon similaire, si il existe dans la borne supérieure deux entiers strictement négatifs mais strictement supérieurs à $-\alpha$, nous pourrons trouver une somme pondérée plus grande que cette borne supérieure.

Maintenant, supposons qu'il existe dans la borne supérieure un entier a_{i_1} tel que $0 \leq a_{i_1} < \alpha$. Puisque $\sum_{i=1}^{n} a_i = -\alpha$, cela implique qu'il existe a_{i_2} tel que $a_{i_2} = -a_{i_1}$ (car deux entiers strictement négatifs et strictement supérieurs à $-\alpha$ ne peuvent pas co-exister dans une borne supérieure). Alors, nous définissons $\{a'_i,\ i = 1 \dots n\}$ tel que $a'_{i_1} = \alpha$, $a'_{i_2} = -\alpha$, et $a'_i = a_i$, pour $i \notin \{i_1, i_2\}$. Puisque w est décroissant, nous avons que $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_i \leq \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a'_i$.

De même, si il existe dans la borne supérieure un entier strictement négatif qui diffère de $-\alpha$, alors il existe une somme pondérée supérieure à cette borne.

Cela implique que dans la borne supérieure, les a_i sont soit égaux à α soit à $-\alpha$. Ainsi, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_i \leq \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha \cdot w_i - \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n} \alpha \cdot w_i$$

□

Nous pouvons maintenant étudier les vecteurs de poids décroissants qui sont proches des vecteurs de poids de minisum.

Proposition 3.21. *Étant donnés $n = 2q + 1$ et w décroissant, si il existe un profil P tel que $AV_w(P) \neq minisum(P)$, alors $W_{0 \to q} \geq W_{q \to 2q+1}$.*

Preuve. Considérons $n = 2q + 1$, w décroissant et P tel que $AV_w(P) \neq \text{minisum}(P)$. Nous noterons $c = minisum(P)$ et $c' = AV_w(P)$, deux comités vainqueurs respectivement pour minisum et pour AV_w. Puisque le nombre de votants est impair, minisum possède un unique comité vainqueur, ainsi nous avons $minisum(c', P) - minisum(c, P) = \alpha$, pour un certain $\alpha \geq 1$. Maintenant, étudions la différence entre les scores AV_w de c et c'.

$$D(c) - D(c') = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (H^{\downarrow}(c)_i - H^{\downarrow}(c')_i)$$

Remarquons que le nombre de candidats qui diffèrent de c à c' est au plus α. En effet, c contient tout les candidats approuvés par une majorité de votants. Ainsi, enlever un candidat de c ou ajouter un candidat à c (dans le but d'obtenir c') augmentera son score minisum d'au moins une unité.

Maintenant, prouvons que pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $-\alpha \leq (H^{\downarrow}(c)_i - H^{\downarrow}(c')_i) \leq \alpha$.

Soit i un entier tel que $1 \leq i \leq n$, nous notons v le votant correspondant à la i^{e} coordonnée de $H(c)$ et v' le votant correspondant à la i^{e} coordonnée de $H(c')$. Sans perte de généralité, par symétrie, nous pouvons supposer que $H(c, v) - H(c, v') \geq 0$. Avec l'inéquation $H(c, v') - H(c', v') \geq -\alpha$, nous obtenons $H(c, v) - H(c', v') \geq -\alpha$, ce qui est exactement $H(c)_i - H(c')_i \geq -\alpha$. De plus, puisque v' est le votant correspondant à la i^{e} coordonnée de $H(c')$, nous avons que $H(c', v') \geq H(c, v) - \alpha$. Cela implique alors que $H(c, v) - H(c', v') \leq \alpha$, ce qui est exactement $H(c)_i - H(c')_i \leq \alpha$.

Enfin, cherchons une borne supérieure pour $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (H^{\downarrow}(c)_i - H^{\downarrow}(c')_i)$.

Rappelons que pour tout $1 \leq i \leq n$, nous avons :

$$-\alpha \leq (H^{\downarrow}(c)_i - H^{\downarrow}(c')_i) \leq \alpha$$

De plus, puisque $minisum(c', P) - minisum(c, P) = \alpha$, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} (H^{\downarrow}(c)_i - H^{\downarrow}(c')_i) = -\alpha$$

Alors nous pouvons appliquer le résultat de la proposition 3.20, et nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (H^{\downarrow}(c)_i - H^{\downarrow}(c')_i) \leq \sum_{i=1}^{q} \alpha \cdot w_i - \sum_{i=q+1}^{n} \alpha \cdot w_i$$

Mais puisque $c' = AV_w(P)$, nous savons que $D(c) - D(c') \geq 0$. Et ainsi, nous avons :

$$0 \leq \sum_{i=1}^{q} \alpha \cdot w_i - \sum_{i=q+1}^{n} \alpha \cdot w_i$$

Ceci implique $W_{0 \to q} \geq W_{q \to 2q+1}$. $\square$

Ce résultat implique que si le vecteur de poids est proche de minisum (c'est-à-dire si $W_{0\to q} < W_{q\to 2q+1}$) et que le nombre de votants est impair, alors AV_w est équivalente à minisum. Dans ce cas, AV_w est donc résistante à la manipulation.

Proposition 3.22. *Si $n = 2q+1$, w est décroissant et tel que $W_{0\to q} < W_{q\to 2q+1}$, alors AV_w est résistante à la manipulation.*

Jusqu'ici, nous savons grâce aux propositions 3.18 et 3.22 que :

- si w est telle que $w_{q+1} > 0$ et $W_{0\to q} \geq W_{q\to 2q+1}$ alors AV_w est manipulable,
- si $W_{0\to q} < W_{q\to 2q+1}$ alors AV_w est équivalente à minisum, et est donc résistante à la manipulation.

Nous avons encore à explorer les vecteurs de poids qui sont proches du vecteur de minimax, c'est-à-dire, lorsque $w_{q+1} = 0$. En fait, la proposition 3.17 peut être utilisée pour traiter ces cas. En effet, lorsque $\alpha = 0$ et $w_{q+1} = 0$ dans la proposition 3.17, le vecteur de poids doit seulement vérifier $w_1 > 0$ pour induire une règle manipulable. Ceci implique :

Proposition 3.23. *Si $n = 2q+1$ et w est décroissant et tel que $w_1 > 0$ et $w_{q+1} = 0$, alors, pour tout m, AV_w^T est manipulable.*

Ainsi, à la fin de cette section, nous pouvons conclure sur la manipulation des règles AV_w avec un nombre impair de votants et un vecteur décroissant. D'une part, les vecteurs de poids w décroissants proche de minisum induisent des règles AV_w équivalentes à minisum et donc non manipulables. D'autre part, pour les vecteurs w qui n'induisent pas minisum, les règles AV_w sont manipulables.

Proposition 3.24. *Si n est impair et w est décroissant et n'induit pas minisum, alors, pour tout m, AV_w^T est manipulable.*

La conclusion des sections 3.4.3.a et 3.4.3.b est que la règle minisum est la seule règle non manipulable parmi les règles AV_w avec un vecteur de poids décroissant.

3.4.3.c Nombre de votants pair et w croissant

Dans les deux sections suivantes, nous nous concentrons sur des vecteurs de poids croissants. Il est alors nécessaire de supposer que les préférences des votants sont Hamming-cohérentes : étant donné $top(>_i)$ pour un votant i, c'est-à-dire son comité préféré, nous supposons que pour tout $c, c' \in 2^X$,

$$c \succeq_i c' \Leftrightarrow d_{\mathcal{H}}(c, top(>_i)) \leq d_{\mathcal{H}}(c', top(>_i)).$$

De même que précédemment, l'étude est séparée en deux cas, celui où le nombre de votants est pair et celui où il est impair.

Nous considérons d'abord un exemple extrême d'OWA croissante, qui est minimin, pour laquelle $w = \langle 0, \ldots, 0, 1\rangle$. Avec cette règle, le score agrégé d'un comité est égal à la distance de Hamming la plus faible avec le profil.

Pour $m = 2$, minimin est manipulable au sens faible (grâce au mécanisme de départage). En effet, remarquons que minimin choisira toujours comme comité vainqueur, le vote de P le plus prioritaire selon T. Alors, considérons le profil P composé d'un vote 00 et d'un vote 11 et supposons que $01 >_T 11 >_T 00$. Le vainqueur est 11 grâce au mécanisme de départage. Si le votant 00 vote 01 alors, le vainqueur est 01, encore une fois grâce au mécanisme de départage. La manipulation est donc réussie, car ce votant préfère 01 to 11.

Maintenant, nous considérons des vecteurs de poids arbitrairement croissants, avec un nombre de votants pairs. Commençons par un exemple.

Exemple 3.9. *Nous considérons un nombre pair $n = 2q$ de votants et un profil P composé de $q - 1$ votes* 00*, 1 vote* 10 *et q votes* 01*. Le mécanisme de départage privilégie* 01 *face à* 10*, et* 00 *face à* 01*. Soit w tel que $w_1 < w_{q+1}$. Nous avons alors*

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (1^{q+1}0^{q-1}) & D(00) = W_{0\to q+1} \\ H^{\downarrow}(01) = (2\ 1^{q-1}0^{q}) & D(01) = 2w_1 + W_{1\to q} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q}1^{q-1}0) & D(10) = 2W_{0\to q} + W_{q\to 2q-1} \\ H^{\downarrow}(11) = (2^{q-1}1^{q+1}) & D(11) = 2W_{0\to q-1} + W_{q-1\to 2q} \end{array}$$

Clairement, nous avons $D(00) < D(11)$. De plus, nous avons $D(01) \leq D(10)$ et si $D(01) = D(10)$ alors le mécanisme de départage favorise 01 *face à* 10*. Finalement, nous avons $D(01) - D(00) = w_1 - w_{q+1}$ et le vainqueur est* 01*.*

Supposons que le votant 10 *change son vote en* 00*. Nous avons maintenant*

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (1^{q}0^{q}) & D(00) = W_{0\to q} \\ H^{\downarrow}(01) = (1^{q}0^{q}) & D(01) = W_{0\to q} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q}1^{q}) & D(10) = 2W_{0\to q} + W_{q\to 2q} \\ H^{\downarrow}(11) = (2^{q}1^{q}) & D(11) = 2W_{0\to q} + W_{q\to 2q} \end{array}$$

Le vainqueur est 00 *grâce au mécanisme de départage est la manipulation est réussie, car le votant* 10 *préfère* 00 *à* 01 *(avec l'hypothèse d'Hamming-cohérence des préférences).*

Encore une fois, il est possible de généraliser cet exemple afin de traiter tout vecteur croissant avec un nombre pair de votants. L'exemple généralisé se trouve en annexe, exemple 6.2.

De même qu'en section précédente, cet exemple reste valide pour tout entier q et, par symétrie, pour tout mécanisme de départage T, défini par un ordre linéaire sur les comités. De plus, ce résultat s'étend à n'importe quel nombre de candidats en ajoutant des candidats factices approuvés (ou rejetés) de façon unanime. Ainsi, nous concluons :

Proposition 3.25. *Si $n = 2q$, w est croissant et il existe α tel que $W_{0\to\alpha-1} = W_{q\to q+\alpha-1}$ et $W_{0\to\alpha} < W_{q\to q+\alpha}$, $0 < \alpha \leq q$, alors, pour tout m, AV_w^T est manipulable.*

Remarquons que lorsque $\alpha = 1$ dans la proposition 3.25, le vecteur de poids w doit seulement vérifier $w_1 < w_{q+1}$ pour induire une règle manipulable. Cela implique

Proposition 3.26. *Si $n = 2q$, w est croissant et il existe α tel que $w_1 < w_\alpha$, pour $1 < \alpha \leq q+1$, alors, pour tout m, AV_w^T est manipulable.*

Les propositions 3.25 et 3.26 nous permettent de conclure sur la manipulation des AV_w pour tout w croissant et pour un nombre de votants pair.

Proposition 3.27. *Si le nombre de votants est pair et w est croissant et diffère du vecteur de poids de minisum, alors, pour tout m, AV_w^T est manipulable.*

Cette propriété implique de façon évidente que toute règle AV_w^T paramétrée par un vecteur strictement croissant est manipulable.

Corollaire 3.2. *Si le nombre de votants est pair et w est strictement croissant, alors, pour tout m, AV_w^T est manipulable.*

3.4.3.d Nombre de votants impair et w croissant

Maintenant, nous étudions comment ce résultat s'étend à un nombre impair de votants, avec un vecteur de poids toujours croissant.

Nous donnons d'abord un exemple de AV_w manipulable pour un nombre impair de votants et 2 candidats, au sens faible, c'est-à-dire, en utilisant un mécanisme de départage des ex aequo.

Exemple 3.10. *Nous considérons un nombre impair $n = 2q+1$ de votants et un profil P composé de q votes 01, 1 vote 11 et q votes 10. Le mécanisme de départage favorise 10 face à 01 et 10 face à 11. Soit w un vecteur de poids croissant tel que $W_{0\to q} \leq W_{q+1\to 2q}$ et $W_{0\to q-1} > W_{q+1\to 2q-1}$. Nous avons*

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (2\ 1^{2q}) & D(00) = 2w_1 + W_{1\to 2q+1} \\ H^{\downarrow}(01) = (2^q\ 1\ 0^q) & D(01) = 2W_{0\to q} + w_{q+1} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^q\ 1\ 0^q) & D(10) = 2W_{0\to q} + w_{q+1} \\ H^{\downarrow}(11) = (1^{2q}\ 0) & D(11) = W_{0\to 2q} \end{array}$$

Clairement, nous avons que $D(11) < D(00)$ et $D(01) = D(10)$. De plus, nous avons $D(10) - D(11) = W_{0\to q} - W_{q+1\to 2q}$, alors $D(10) \leq D(11)$. Le vainqueur est donc 10, grâce au départage avec 01 et avec 11 si $W_{0\to q} = W_{q+1\to 2q}$.

Maintenant, supposons qu'un des votants 01 vote 11. Nous avons alors

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (2^2 1^{2q-1}) & D(00) = 2W_{0\to 2} + W_{2\to 2q+1} \\ H^{\downarrow}(01) = (2^q 1^2 0^{q-1}) & D(01) = 2W_{0\to q} + W_{q\to q+2} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q-1} 1^2 0^q) & D(10) = 2W_{0\to q-1} + W_{q-1\to q+1} \\ H^{\downarrow}(11) = (1^{2q-1} 0^2) & D(11) = W_{0\to 2q-1} \end{array}$$

Clairement, nous avons $D(11) < D(00)$ *et* $D(10) \leq D(01)$. *De même, nous avons* $D(10) - D(11) = W_{0\to q-1} - W_{q+1\to 2q-1}$, *ce qui implique que* $D(11) < D(10)$. *Ainsi le vainqueur est* 11. *La manipulation est réussie, car le votant* 01 *préfère* 11 *à* 10.

De façon similaire au cas précédent, nous pouvons généraliser l'exemple précédent pour traiter toutes les règles paramétrées par des vecteurs croissants avec un nombre de votants impair. L'exemple généralisé se trouve en annexe, exemple 6.3.

De même qu'en section précédente, cet exemple reste valide pour tout entier q et, par symétrie, pour tout mécanisme de départage T, défini par un ordre linéaire sur les comités. De plus, ce résultat s'étend à n'importe quel nombre de candidats en ajoutant des candidats factices approuvés (ou rejetés) de façon unanime. Alors, nous concluons :

Proposition 3.28. *Si* $n = 2q+1$, *w est un vecteur de poids croissant et il existe un entier* α *tel que* $W_{0\to q-\alpha} \leq W_{q+1\to 2q-\alpha}$ *et* $W_{0\to q-\alpha-1} > W_{q+1\to 2q-\alpha-1}$, $0 \leq \alpha < q$, *alors, pour tout* m, AV_w^T *est manipulable.*

Remarquons que nous pouvons adapter le mécanisme de départage de cet exemple pour montrer que :

Proposition 3.29. *Si* $n = 2q+1$, *w est un vecteur de poids croissant et il existe un entier* α *tel que* $W_{0\to q-\alpha} < W_{q+1\to 2q-\alpha}$ *et* $W_{0\to q-\alpha-1} \geq W_{q+1\to 2q-\alpha-1}$, $0 \leq \alpha < q$, *alors, pour tout* m, AV_w^T *est manipulable.*

Cependant, remarquons que cet exemple généralisé ne traite pas les vecteurs croissants tels que $W_{0\to q+1} \leq W_{q+1\to 2q+1}$ et $W_{0\to q} > W_{q+1\to 2q}$. En effet, avec de tels vecteurs de poids et seulement deux candidats, AV_w^T induit minisum (proposition 3.34) et est donc résistante à la manipulation. L'exemple suivant prouve la manipulabilité de tels vecteurs, et il requiert trois candidats.

Exemple 3.11. *Nous considérons un nombre impair* $n = 2q+1$ *de votants et 3 candidats. Le profil* P *est composé de* q *votes* 100, 1 *vote* 010 *et* q *votes* 111. *Le mécanisme de départage favorise* 111 *face à* 010, *face à* 100 *et face à* 110. *Soit* w *un vecteur croissant tel que* $W_{0\to q+1} \leq W_{q+1\to 2q+1}$ *et* $W_{0\to q} > W_{q+1\to 2q}$. *Nous avons*

$$\begin{array}{ll}
H^{\downarrow}(000) = (3^q 1^{q+1}) & D(000) = 3W_{0\to q} + W_{q\to 2q+1} \\
H^{\downarrow}(001) = (2^{2q+1}) & D(001) = 2W_{0\to 2q+1} \\
H^{\downarrow}(010) = (2^{2q} 0^1) & D(010) = 2W_{0\to 2q} \\
H^{\downarrow}(011) = (3^q 1^{q+1}) & D(011) = 3W_{0\to q} + W_{q\to 2q+1} \\
H^{\downarrow}(100) = (2^{q+1} 0^q) & D(100) = 2W_{0\to q+1} \\
H^{\downarrow}(101) = (3\ 1^{2q}) & D(101) = 3w_1 + W_{1\to 2q+1} \\
H^{\downarrow}(110) = (1^{2q+1}) & D(110) = W_{0\to 2q+1} \\
H^{\downarrow}(111) = (2^{q+1} 0^q) & D(111) = 2W_{0\to q+1}
\end{array}$$

Clairement, le score de 110 *est strictement inférieur aux scores de* 000, 001, 011 *et* 101 *(en effet, nous avons* $W_{0\to q} > W_{q+1\to 2q}$ *ce qui implique* $w_1 > 0$*). Nous avons aussi*

$D(111) = D(100)$ et $D(111) \leq D(010)$ et le mécanisme de départage favorise 111 dans les deux cas. Enfin, nous avons $D(111) - D(110) = W_{0\to q+1} - W_{q+1\to 2q+1}$. Ainsi, le vainqueur est 111, grâce au départage avec 110 si $W_{0\to q+1} = W_{q+1\to 2q+1}$.

Maintenant, supposons qu'un votant 100 change son vote en 110. Nous avons alors

$$\begin{array}{ll}
H^{\downarrow}(000) = (3^q\ 2\ 1^q) & D(000) = 3W_{0\to q} + 2w_{q+1} + W_{q+1\to 2q+1} \\
H^{\downarrow}(001) = (3\ 2^{2q}) & D(001) = 3w_1 + 2W_{1\to 2q+1} \\
H^{\downarrow}(010) = (2^{2q-1}\ 1\ 0) & D(010) = 2W_{0\to 2q-1} + w_{2q} \\
H^{\downarrow}(011) = (3^{q-1}\ 2\ 1^{q+1}) & D(011) = 3W_{0\to q-1} + 2w_q + W_{q\to 2q+1} \\
H^{\downarrow}(100) = (2^{q+1}\ 1\ 0^{q-1}) & D(100) = 2W_{0\to q+1} + w_{q+2} \\
H^{\downarrow}(101) = (3\ 2\ 1^{2q-1}) & D(101) = 3w_1 + 2w_2 + W_{2\to 2q+1} \\
H^{\downarrow}(110) = (1^{2q}\ 0) & D(110) = W_{0\to 2q} \\
H^{\downarrow}(111) = (2^q\ 1\ 0^q) & D(111) = 2W_{0\to q} + w_{q+1}
\end{array}$$

Clairement, le score de 110 est toujours strictement inférieur aux scores de 000, 001, 011 et 101. Nous avons $D(111) < D(100)$ et $D(111) \leq D(010)$. Enfin, nous avons que $D(111) - D(110) = W_{0\to q} - W_{q+1\to 2q}$. Ainsi, le vainqueur est 110. La manipulation est donc réussie, car le votant 100 préfère 110 à 111.

Encore une fois, cet exemple reste valide pour tout entier q, pour tout mécanisme de départage T défini par un ordre linéaire sur les comités et pour tout nombre de candidats supérieur à 3. Alors, nous concluons :

Proposition 3.30. *Si $n = 2q + 1$, w est croissant et tel que $W_{0\to q+1} \leq W_{q+1\to 2q+1}$ et $W_{0\to q} > W_{q+1\to 2q}$, alors, pour tout $m \geq 3$, AV_w^T est manipulable.*

De même, nous pouvons adapter le mécanisme de départage de cet exemple pour montrer que :

Proposition 3.31. *Si $n = 2q + 1$, w est croissant et tel que $W_{0\to q+1} < W_{q+1\to 2q+1}$ et $W_{0\to q} \leq W_{q+1\to 2q}$, alors, pour tout $m \geq 3$, AV_w^T est manipulable.*

Cependant, comme pour le cas décroissant, lorsque le nombre de votants est impair il existe des vecteurs de poids croissants w qui différent du vecteur de poids de minisum mais qui induisent une règle AV_w non manipulable. En fait, lorsque le vecteur de poids w est proche de celui de minisum et que le nombre de votants est impair, la règle AV_w et la règle minisum produisent toujours le même résultat. La règle AV_w est donc équivalente à minisum et par conséquent non manipulable :

Proposition 3.32. *Étant donnés $n = 2q + 1$ et w croissant, si il existe un profile P tel que $AV_w(P) \neq minisum(P)$, alors $W_{0\to q+1} \leq W_{q\to 2q+1}$.*

La preuve de cette propriété est similaire à celle de la propriété 3.21 et se trouve en partie annexe, preuve 6.2.

Ce résultat implique que si le vecteur de poids est proche de celui de minisum, alors $AV_w(P)$ induit minisum, et, par conséquent, est résistante à la manipulation.

Proposition 3.33. *Si $n = 2q + 1$ et w est croissant et tel que $W_{0 \to q+1} > W_{q+1 \to 2q+1}$, alors AV_w est résistante à la manipulation.*

De plus, montrons maintenant que les vecteurs w tels que $W_{0 \to q} > W_{q+1 \to 2q}$ induisent eux aussi minisum, lorsqu'il n'y a que deux candidats.

Proposition 3.34. *Si $n = 2q + 1$, $m = 2$, w est croissant et tel que $W_{0 \to q} > W_{q+1 \to 2q}$, alors AV_w est équivalente à minisum.*

De même, la preuve de cette propriété est similaire à la précédente et se trouve en annexe, preuve 6.2.

Jusqu'ici, les propositions de cette section (3.28, 3.29, 3.30, 3.31, 3.33 et 3.34) nous permettent de conclure que :

- si w est tel que $w_1 > 0$ et $W_{0 \to q+1} \leq W_{q+1 \to 2q+1}$ alors AV_w est manipulable,
- de plus si $w_1 = 0$ et $w_{q+1} > 0$ alors AV_w est manipulable (ce qui correspond au cas où $\alpha = q - 1$ dans l'exemple généralisé),
- si $W_{0 \to q+1} > W_{q+1 \to 2q+1}$ alors AV_w est équivalente à minisum et est donc résistante à la manipulation,
- et enfin si $W_{0 \to q} > W_{q+1 \to 2q}$ et $m = 2$ alors AV_w est aussi égale minisum et de même résistante à la manipulation.

Il nous reste à explorer les vecteurs de poids qui se trouvent proche de minimin, lorsque $w_{q+1} = 0$. Supposons alors que $w_{q+1} = 0$. L'exemple généralisé en annexe, exemple 6.4, nous permet de montrer que dans ce cas les règles AV_w sont aussi manipulables. Ce résultat demeure valide pour tout q, pour tout mécanisme de départage (par symétrie), ainsi que pour tout nombre de candidats. Par conséquent, nous concluons :

Proposition 3.35. *Si $n = 2q + 1$, w est croissant et qu'il existe α tel que $w_{2q-\alpha} = 0$ et $w_{2q+1-\alpha} > 0$, alors, pour tout m, AV_w^T est manipulable.*

La conclusion des sections 3.4.3.c et 3.4.3.d est que dès lors qu'un vecteur de poids w croissant n'induit pas minisum, le règle AV_w^T est manipulable.

Finalement, les résultats obtenus dans les sections 3.4.3.a, 3.4.3.b, 3.4.3.c et 3.4.3.d nous permettent de répondre à la question que l'on s'est posée en début de partie, à savoir : minisum est-elle la seule règle non manipulable parmi les règles AV_w avec un vecteur de poids monotone.

Théorème 6. *La règle minisum est la seule règle non manipulable parmi les règles AV_w avec un vecteur de poids w monotone, lorsque l'on considère un ordre linéaire comme mécanisme de départage des ex aequo.*

Ce résultat souligne le lien qui existe entre équité et manipulation dans les règles de vote à vainqueurs multiples.

3.4.4 Résumé

Cette section porte sur la manipulation de minimax et des règles AV_w.

Dans un premier temps, nous étudions la manipulabilité de la règle minimax avec deux candidats, selon les trois manières de procéder présentées en section 3.4.1. En "déterminisant" minimax par un mécanisme de départage des ex aequo, nous avons montré que minimax est manipulable, même avec deux candidats. Puis, avec l'hypothèse des préférences cardinales, nous avons montré que la règle minimax non déterministe avec mécanisme de départage randomisé est résistante à la manipulation. Enfin, la règle irrésolue minimax a été montrée résistante à la manipulation avec les principes d'extensions optimiste, pessimiste et de Gärdenfors (et donc aussi pour les principes de Kelly et de Fishburn).

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à la manipulation des règles AV_w paramétrées par des vecteurs de poids monotones. L'étude des vecteurs décroissants s'est structurée en deux sections en fonction de la parité du nombre de votants. D'une part, lorsque le nombre de votants est pair, toute règle AV_w paramétrée par un vecteur décroissant qui diffère du vecteur de minisum est manipulable. D'autre part, avec un nombre impair de votants, certains vecteurs de poids proche de celui de minisum conduisent à des règles AV_w équivalentes à minisum et donc non manipulables. Cependant les règles AV_w qui ne sont pas équivalentes à minisum sont démontrées manipulables. L'étude des vecteurs croissants est analogue à celle-ci. La conclusion de cette étude est donc que minisum est la seule règle paramétrée par un vecteur de poids monotone qui est résistante à la manipulation.

3.5 Nombre de comités vainqueurs ex aequo

Dans cette section, nous étudions le nombre moyen de comités vainqueurs ex aequo pour minisum, minimax et les règles AV_w.

Une des critiques à l'encontre de minimax par rapport à minium est son caractère non décisif, dû à l'augmentation du nombre de comités ex aequo. Cela s'explique par l'utilisation de l'opérateur maximum qui possède moins de pouvoir discriminant que l'opérateur somme. Cette augmentation a pour effet principal d'accroître l'importance du mécanisme de départage des ex aequo, ce qui n'est clairement pas souhaitable.

Dans un premier temps, nous étudierons théoriquement le pire cas, c'est-à-dire, le plus grand nombre de comités ex aequo lors d'une élection. Dans un second, nous effectuerons une étude expérimentale du nombre moyen de comités vainqueurs pour des exemples de règles $AV_{w(i)}$, dont minisum et minimax.

3.5.1 Étude théorique du pire cas

Étudions maintenant le nombre de comités ex aequo dans le pire des cas pour les règles $AV_{w(i)}$.

Remarquons d'abord que, même pour minisum, la taille de l'ensemble des comités vainqueurs peut croître de façon exponentielle par rapport au nombre de candidats. En effet, si on considère l'exemple d'une élection où chaque candidat est approuvé par exactement la moitié des votants, alors tous les comités sont vainqueurs ex aequo. Par contre, pour un nombre impair de votants, il n'existe pas de candidat approuvé par exactement la moitié des votants, donc il existe un unique comité vainqueur. Mais ce dernier résultat ne s'étend pas aux règles $AV_{w(i)}$ pour $i \geq 1$:

Proposition 3.36. *Pour tout $i \geq 1$, il existe une famille d'élections telles que la taille de l'ensemble des comités vainqueurs ex aequo pour $AV_{w(i)}$ est exponentielle par rapport au nombre de candidats.*

Preuve. Nous définissons une famille infinie d'élections $(E_{n \cdot m})_{n,m \in N}$ telle que la taille de l'ensemble des comités vainqueurs est en $O(2^{\frac{m}{2}})$.

Considérons la famille infinie d'élection $(E_{n \cdot m})_{n,m \in N} = (X, N, P)$, avec un nombre pair de votants, où P est le profil d'approbations suivant : $n/2$ votants approuvent tous les candidats et les $n/2$ autres votants n'en approuvent aucun.

Remarquons alors que, par construction d'une telle élection, le vecteur ordonné des distances de Hamming, $\mathrm{H}^{\downarrow}(c, P)$, d'un comité c au profil P vérifie :

$$\mathrm{H}^{\downarrow}(c, P) = (\beta_c, \ldots, \beta_c, \alpha_c, \ldots, \alpha_c),$$

avec $\alpha_c, \beta_c \in \mathbb{N}$, $n/2$ occurrences de chaque α_c et β_c, $\alpha_c \leq \beta_c$ et $\alpha_c + \beta_c = m$.

Maintenant, considérons une élection $e_{n \cdot m}$ de cette famille, un vecteur de poids $w(i)$, $i = 1 \ldots n-1$, et un comité c. Nous distinguons deux cas :

- si $i \geq n/2$, alors
$$O_{w(i)}(H(c, P)) = (n - i) \cdot \beta_c$$
- si $i < n/2$, alors
$$\begin{aligned} O_{w(i)}(H(c, P)) &= n/2 \cdot \beta_c + (n/2 - i) \cdot \alpha_c \\ &= n/2 \cdot (\beta_c + \alpha_c) - i \cdot (m - \beta_c) \\ &= n/2 \cdot m - i \cdot m + i \cdot \beta_c \\ &= (n/2 - i)m + i \cdot \beta_c \end{aligned}$$

Ces deux résultats nous montrent que minimiser $O_{w(i)}(H(c,P))$ est équivalent à minimiser la valeur de β_c. Les comités pour lesquels la valeur de β_c est minimale sont les comités qui contiennent $m/2$ candidats si m est pair, et $\lfloor m/2 \rfloor$ ou $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ si m est impair. Ainsi, il existe $O(2^{\frac{m}{2}})$ comités qui vérifient cette condition.

En utilisant le même raisonnement, nous pouvons construire une famille d'élections avec un nombre impair de votants, telle que pour chacune des élections de cette famille, la taille de l'ensemble des comités vainqueurs pour $AV_{w(i)}$ soit en $O(2^{\frac{m}{2}})$, pour $i \geq 1$. $\square$

Remarquons cependant que ce résultat ne nous informe pas sur la possiblité de trouver une caractérisation simple de l'ensemble des comités vainqueurs, comme c'est le cas pour minisum (rappelons que pour minisum les comités vainqueurs sont les comités qui contiennent l'ensemble des candidats approuvés par une stricte majorité de votants et aucun des candidats approuvés par moins que la stricte majorité).

Ainsi, dans le pire des cas, toutes les règles $AV_{w(i)}$ peuvent aboutir à un nombre exponentiel de comités vainqueurs ex aequo. Seule la règle minisum fait exception ; lorsque le nombre de votants est impair, minisum ne possède qu'un comité vainqueur.

Étudions maintenant par l'expérimentation, le nombre moyen de comités ex aequo pour une règle donnée.

3.5.2 Étude expérimentale

Dans cette section, nous observons le comportement de certaines règles $AV_{w(i)}$ par rapport au nombre de comités ex aequo. Cette brève étude expérimentale a pour objectif de mettre en perspective les critiques portant sur le nombre de comités vainqueurs ex aequo pour minimax.

Pour ce faire, nous avons tiré de l'ordre de 10^4 élections suivant une distribution de probabilité uniforme [2] sur les votes possibles. Étant donnée une règle $AV_{w(i)}$, nous avons alors calculé la moyenne du nombre de comités ex aequo sur ces élections.

Comme pour la manipulation, les résultats obtenus sont partiellement différents si on considère un nombre pair ou impair de votants. Commençons par considérer un nombre impair de votants.

La figure 3.1 regroupe les résultats obtenus avec cinq votants pour les règles minisum, $AV_w(1)$, $AV_w(2)$, $AV_w(3)$ et minimax. Pour chacune de ces règles, nous obtenons une courbe qui représente le nombre moyen de comités vainqueurs ex aequo en fonction du nombre de candidats.

Tout d'abord, on vérifie le fait qu'il existe un seul comité vainqueur pour minisum lorsque le nombre de votants est impair. Ensuite on remarque que le nombre de comités de minimax est le plus élevé parmi les règles étudiées. Avec 5 candidats, le nombre moyen

2. Il s'agit de l'hypothèse de culture impartiale que nous expliquerons plus en détail dans la section 5.3.3.a.

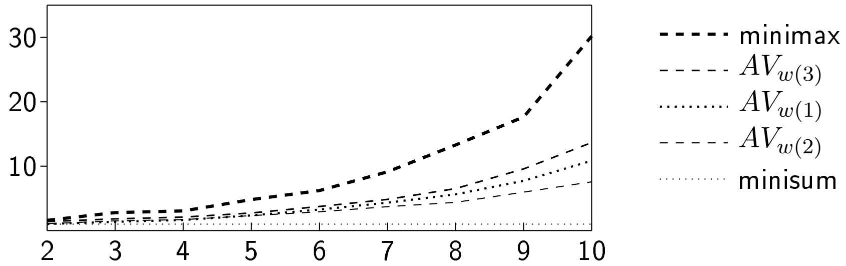

FIGURE 3.1 – Nombre moyen de comités ex aequo en fonction du nombre de candidats, pour $n = 5$.

de comités vainqueurs est de 5 et augmente jusqu'à 30 avec 10 candidats. Finalement, les règles $AV_w(1)$, $AV_w(2)$ et $AV_w(3)$ se situent au même niveau et produisent en moyenne la moitié moins de comités vainqueurs que minimax. Notons aussi que le nombre moyen de comités pour le règle $AV_{w(2)}$ est plus petit que pour la règle $AV_{w(1)}$. Ainsi, contrairement à ce que l'on pourrait penser, l'augmentation du nombre moyen de comités ex aequo n'est pas systématique lorsque l'on se rapproche de minimax.

Maintenant, considérons un nombre pair de votants.

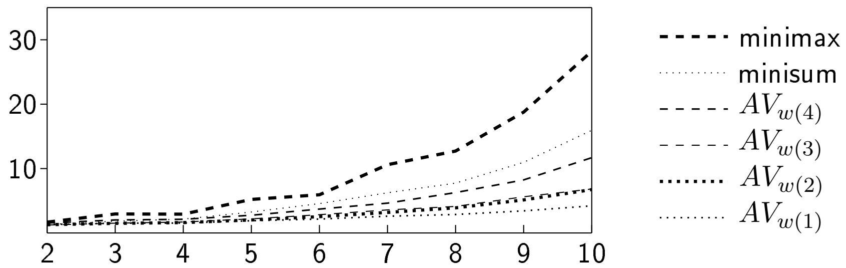

FIGURE 3.2 – Nombre moyen de comités ex aequo en fonction du nombre de candidats, pour $n = 6$.

La figure 3.2 regroupe les résultats obtenus avec 6 votants pour les règles minisum, $AV_w(1)$, $AV_w(2)$, $AV_w(3)$, $AV_w(4)$ et minimax. Pour chacune de ces règles, nous obtenons une courbe qui représente le nombre moyen de comités vainqueurs ex aequo en fonction du nombre de candidats.

Encore une fois, on observe que la règle minimax est la règle avec le plus grand nombre moyen de comités ex aequo. Cependant, cette fois-ci, la règle minisum est la seconde règle possédant le plus grand nombre de comités vainqueurs, avec près de la moitié de ceux de minimax. Les règles $AV_w(1)$, $AV_w(2)$, $AV_w(3)$ et $AV_w(4)$ se situent sous la courbe de minisum, et produisent 3 à 4 fois de comités ex aequo que minimax.

Pour conclure cette brève étude expérimentale, observons comment ces règles se comportent lorsque le nombre de votants augmente. La figure 3.3 représente le nombre de comités vainqueurs moyen en fonction du nombre de candidats, avec 36 votants.

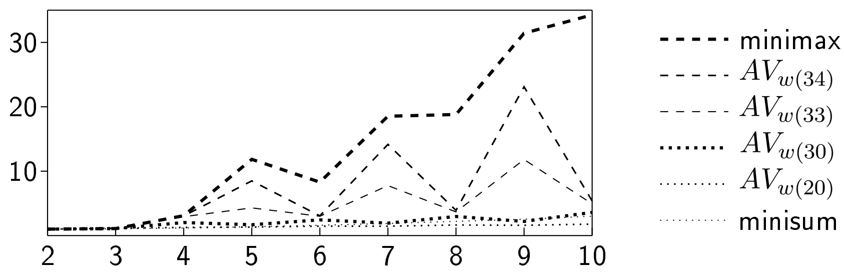

FIGURE 3.3 – Nombre moyen de comités ex aequo en fonction du nombre de candidats, pour $n = 36$.

Tout d'abord, le nombre de comités vainqueurs moyen est globalement plus faible pour l'ensemble des règles considérées (sauf minimax) par rapport à la situation avec 6 votants. Ce phénomène n'est pas étonnant. Dans le premier cas, le nombre de votant très faible par rapport au nombre de comités possibles (entre 4 et 1024) rend l'issue du vote très incertaine. En effet, il existe une forte probabilité que chaque votant vote pour un comité différent. L'augmentation du nombre de votants implique une augmentation de la probabilité que deux votants votent pour le même comité, ce qui rend le vote moins incertain.

On remarque qu'avec un nombre de votants plus grand, minimax est toujours la règle avec le plus grand nombre moyen de comités. Minisum et la plupart des règles $AV_{w(i)}$ possèdent un nombre de comités vainqueurs faible, en moyenne 15 fois plus faible que celui de minimax. Enfin, seules les règles $AV_{w(i)}$ proche de minimax ($i \geq 30$) voient leur nombre de comités ex aequo augmenter significativement lorsque l'on fait varier le nombre de candidats de 2 à 10.

3.5.3 Résumé

Cette section porte sur l'étude du nombre de comités vainqueurs ex aequo pour minisum, minimax et les règles $AV_{w(i)}$.

La première partie du chapitre porte sur l'étude théorique du nombre de comités vainqueurs dans le pire cas. Nous montrons que toutes les règles $AV_{w(i)}$ peuvent aboutir à un nombre exponentiel de comités vainqueurs ex aequo. Seule la règle minisum fait exception ; lorsque le nombre de votants est impair, minisum ne possède qu'un comité vainqueur.

La seconde partie porte sur l'étude expérimentale du nombre moyen de comités vainqueurs. Avec l'hypothèse de culture impartiale (distribution de probabilité uniforme des votes), on observe que minimax produit un nombre de comités vainqueurs bien plus élevé que les autres règles $AV_{w(i)}$. De plus, lorsque le nombre de votants est pair, minisum aussi possède un nombre de comités ex aequo plus élevé que les autres règles $AV_{w(i)}$.

Chapitre 4
Vote par approbation et domaines combinatoires : préférences non séparables

Résumé Le vote par approbation est une méthode simple et efficace pour conduire des élections de comités et de façon similaire des référendums multiples. Dans cette méthode, chaque votant approuve un ensemble de candidats (ou propositions), et le comité optimal (ou les propositions acceptées) est défini selon un processus d'optimisation qui, dans un premier temps, calcule la satisfaction d'un votant en prenant en compte le nombre de candidats approuvés ou rejetés qui ont été sélectionnés ou non sélectionnés, et dans un second temps, agrège la satisfaction des différents votants. Tandis que cette approche est adaptée dans le cas où les votants possèdent des préférences séparables, elle l'est moins dans le cas contraire. En effet, un votant ne peut pas exprimer ses préférences sur un candidat conditionnées par le fait qu'un autre candidat est déjà élu. Nous proposons, dans ce chapitre, une famille de règles fondées sur le vote par approbation pour les élections de comités et les référendums multiples, où les votes par approbation sont généralisés en des votes par approbation conditionnelle. Nous nous concentrons sur trois règles. Les deux premières règles sont les généralisations naturelles des règles minisum et minimax, tandis que la troisième est une version du vote séquentiel sur des domaines combinatoires fondée sur le vote par approbation conditionnelle. Nous explorons la complexité de calcul et les propriétés axiomatiques de ces règles, comparons leurs résultats, avant d'étudier leur manipulabilité.

Sommaire

4.1 Introduction

Le vote par approbation est une méthode simple et efficace pour conduire des élections de comités et de façon similaire des référendums multiples. En vote par approbation, chaque votant exprime ses préférences à l'aide d'un vote qui consiste en un sous-ensemble de candidats approuvés par ce dernier. Les élections de comités et les référendums multiples sont un cas particulier de vote sur des domaines combinatoires. Rappelons qu'un domaine de vote combinatoire est un produit cartésien de plusieurs domaines, où chaque domaine est composé d'un ensemble fini de valeurs pour une variable donnée.

Dans le chapitre 3, nous avons étudié les règles minisum et minimax pour les élections de comités. Ces règles, fondées sur la distance de Hamming, ont été conçues pour des *préférences séparables*, c'est-à-dire, des préférences pour lesquelles il n'existe pas de dépendances préférentielles entre les variables. Cependant dans de nombreuses situations, les préférences des votants ne sont pas séparables.

Prenons deux exemples de préférences séparables et non séparables sur des domaines combinatoires. Considérons la situation du choix d'un menu commun. Dans cet exemple, le domaine de vote est composé de 2 variables $D = D1 \times D2$, où $D1 = \{m, f, v\}$ (meat, fish, vegetarian dish) et $D2 = \{r, w, b\}$ (red wine, white wine, beer). Les votants doivent décider d'un menu commun, c'est-à-dire choisir le plat et la boisson. Supposons qu'un votant possède les préférences suivantes :

$$mr \succ mb \succ mw \succ fr \succ fb \succ fw \succ vr \succ vb \succ vw$$

Dans ce cas les préférences du votant sont séparables ($m \succ f \succ v$ et $r \succ b \succ w$). Il n'existe donc pas de dépendance entre les variables. Ce votant peut exprimer ses préférences sous la forme d'un vote par approbation sans difficultés, et les règles de minisum et minimax sont appropriées. Maintenant supposons que les préférences du votant soient les suivantes :

$$mr \succ fw \succ mb \succ mw \succ fb \succ fr \succ vr \succ vb \succ vw$$

Dans ce cas les préférences du votant ne sont pas séparables. En effet, on s'aperçoit que lorsque la viande (m) est choisie le votant préfère le vin rouge au blanc ($mr \succ mw$), mais lorsque le poisson (f) est choisi, la préférence s'inverse ($fw \succ fr$). Ainsi, les préférences sur la boisson sont conditionnées par le choix du plat. Le votant ne peut pas exprimer cette dépendance avec le vote par approbation classique.

Le problème de ce chapitre est alors de savoir comment généraliser le vote par approbation et les règles minisum et minimax pour des *préférences non séparables* ?

4.1.1 Motivation et plan

Les situations de décisions collectives sur des domaines combinatoires sont nombreuses. Comme on l'a déjà mentionné, les élections de comités et les référendums multiples sont des cas particuliers de vote sur des domaines combinatoires très présents dans la vie politique.

Généralement, dans ces deux types d'élections, le mécanisme de vote utilisé est le vote par approbation.

Le vote par approbation possède des caractéristiques intéressantes dans le cadre du vote sur des domaines combinatoires. En particulier, il permet aux votants d'exprimer relativement facilement leurs préférences, comparé aux ordres de préférences qui demandent un effort trop important. De plus, il s'applique aussi bien aux élections à vainqueur unique qu'aux élections à vainqueurs multiples.

Le vote par approbation a déjà été étudié dans le cadre des élections de comités et des référendums multiples. Cependant, toutes les méthodes que nous connaissons pour le vote par approbation à vainqueurs multiples ne permettent pas aux votants d'exprimer des préférences conditionnelles. Ces méthodes, qui sont présentées en section 2.3.4, font en général l'hypothèse que les votants possèdent des préférences séparables. Comme nous le verrons avec l'exemple du choix d'un menu commun dans la section 4.2, cette hypothèse n'est pas adaptée dans certains cas, en particulier quand il existe des dépendances entre les variables.

Nous proposons une famille de méthodes qui allie à la fois la simplicité du vote par approbation et la possibilité d'exprimer des préférences conditionnelles, à l'aide d'*approbations conditionnelles*.

Dans la section suivante, nous introduirons le *vote par approbation conditionnelle*, où les votants approuvent des valeurs pour une variable sachant que des valeurs pour d'autres variables ont été sélectionnées. L'alternative vainqueur est le résultat d'un processus d'optimisation dont nous définissons deux variantes. La première est la généralisation naturelle du vote par approbation simple, minisum, et la seconde est la généralisation de minimax [1]. La généralisation d'autres méthodes comme le vote par approbation proportionnel ou par satisfaction est tout à fait possible.

Une autre méthode connue de vote sur des domaines combinatoires est celle du *vote séquentiel*. Étant donné un ordre sur les variables, le vote séquentiel demande aux votants de s'exprimer sur les variables les unes après les autres. Cette méthode permet aux votants d'exprimer partiellement des préférences conditionnelles puisqu'ils s'expriment sur une variable étant donné le résultat des votes sur les variables précédentes. Nous proposerons d'utiliser le vote par approbation séquentiel dans le cadre des approbations conditionnelles.

Dans un premier temps, nous nous concentrons sur les règles de vote par approbation conditionnelle non-séquentiel, à savoir minisum et minimax conditionnelles. Tout d'abord, nous étudions la complexité de calcul de ces deux règles, et montrons que minisum conditionnelle est NP-difficile à calculer. Puis nous étudions la proximité de ces deux règles, en comparant les scores de leurs solutions. Ensuite, nous étudions les propriétés axiomatiques de ces règles ainsi que leur manipulation, en les considérant, dans les deux cas, résolues par un mécanisme de départage des ex aequo et irrésolues à l'aide d'un principe d'extension des préférences.

1. Les règles minisum et minimax sont présentées en section 3.2.2.

Dans un second temps, nous étudions le vote par approbation séquentiel, en commençant par comparer la proximité de cette règle avec la règle de minisum conditionnelle. Ensuite, nous étudions la manipulation du vote séquentiel par approbations conditionnelles.

4.1.2 Travaux en lien

Ce chapitre est lié à plusieurs directions de recherche. La première est l'étude du vote par approbation à vainqueurs multiples avec préférences séparables, comme la règle minisum, la règle minimax, le vote par k-approbation, le vote par approbation proportionnel et l'ensemble des règles présentées en section 2.3.4. Dans cette approche, l'hypothèse de la séparabilité des préférences restreint l'expressivité des règles utilisées mais permet d'avoir un coût de communication faible. De nombreuses règles ont été étudiées permettant d'aboutir à des solutions plus ou moins satisfaisantes en fonction du contexte, elles sont présentées en détail par Kilgour (2010).

La deuxième est celle du vote sur des domaines combinatoires à l'aide de préférences conditionnelles. Plusieurs méthodes ont été proposées pour voter sur des domaines combinatoires à l'aide de préférences conditionnelles, en particulier les méthodes basées sur l'hypercube des préférences. On trouvera une présentation de l'ensemble de ces méthodes dans Lang et Xia (2016). Ces méthodes reposent sur un langage compact de représentation des préférences. Le premier langage de représentation compacte des préférences que l'on peut citer est celui des réseaux de préférences conditionnelles (conditional preference networks ou CP-nets). Associés à une relation d'ordre sur les propositions, les CP-nets permettent d'exprimer de manière compacte l'hypercube des préférences. Les préférences conditionnelles que nous définissons en section 4.2.2 sont similaires aux CP-nets, comme nous le verrons plus loin. Citons aussi Uckelman et al. (2009) qui propose une méthode qui ne s'appuie pas sur les CP-nets. Il s'agit d'exprimer les préférences via des formules logiques pondérées, ce qui peut être coûteux en communication.

4.2 Notions préliminaires

Nous considérons un domaine $D = D_1 \dots D_p$, où chaque D_i est un ensemble fini de valeurs pour une variable X_i, et un groupe de votants qui doit décider d'une alternative commune $\overrightarrow{d} = (d_1, \dots, d_p) \in D$. Nous connaissons déjà une multitude de classes de méthodes pour voter à l'aide d'ordres sur les alternatives, présentées dans Lang et Xia (2016). Comment pouvons-nous les étendre pour le vote par approbation ? Nous présenterons quatre méthodes de vote par approbation sur domaines combinatoires dans cette section, à savoir, l'approbation directe fondée sur une représentation compacte des préférences ; les règles minisum et minimax conditionnelles fondées sur des préférences conditionnelles ; et le vote séquentiel par approbations conditionnelles.

Pour illustrer les notions de cette section, nous les appliquerons à l'exemple du choix d'un menu commun. Dans cet exemple, nous considérons un domaine composé de 2 variables $D = D1 \times D2$, où $D1 = \{m, f, v\}$ (meat, fish, vegetarian dish) et $D2 = \{r, w, b\}$ (red wine, white wine, beer). Les votants doivent choisir le plat et la boisson.

Avant de présenter les préférences conditionnelles, mentionnons deux manières extrêmes (dans un certain sens) de procéder à une élection dans cet exemple, proposées dans Lang et Xia (2016). La première, nommée *vote par approbation décomposable*, consiste à demander aux votants d'approuver des valeurs pour chaque domaine de manière indépendante. L'élicitation des préférences est simple et cette méthode ne requiert pas beaucoup de communication. Cependant, il est impossible pour les votants d'exprimer des préférences conditionnelles.
La seconde méthode, nommée *vote par approbation combinatoire directe*, consiste à demander aux votants de spécifier toutes les combinaisons de valeurs qu'ils approuvent, si possible de manière compacte. Dans ce cas, les votants peuvent exprimer des préférences conditionnelles, mais le coût de communication est élevé. De plus, un problème avec le vote par approbation combinatoire directe, est que lorsque qu'un votant a obtenu une valeur qu'il n'approuve pas pour une variable, alors son avis ne compte pas pour les autres variables. Présentons brièvement l'approbation directe avec représentation compacte des préférences.

4.2.1 Approbation directe avec représentation compacte des préférences

Dans cette partie, nous présentons brièvement une méthode de vote par approbation directe fondée sur un langage de représentation des préférences sous la forme de formules propositionnelles. Dans ce cadre, les votants expriment leurs préférences simplement à l'aide d'une formule propositionnelle représentant l'ensemble des alternatives qu'ils approuvent. L'alternative élue est alors l'alternative qui reçoit le plus d'approbation de la part des votants. L'exemple 4.1 illustre cette situation.

Exemple 4.1. *Considérons le domaine déjà mentionné, $D = \{m, f, v\} \times \{r, w, b\}$, et 19 votants. Les préférences des votants sont les suivantes :*

- *5 votants approuvent $(m \vee f) \wedge (m \rightarrow r) \wedge (f \rightarrow w)$: ils ne veulent pas le plat végétarien, et désirent du vin rouge (respectivement blanc) avec de la viande (respectivement du poisson).*
- *4 votants approuvent $m \wedge b$: ils veulent de la viande avec de la bière, rien d'autre.*
- *4 votants approuvent $(m \rightarrow r \vee w) \wedge (f \rightarrow w) \wedge (v \rightarrow r \vee b)$: ils ne s'opposent à aucun plat mais ne veulent pas de bière, avec du poisson ils désirent du vin blanc, et avec le plat végétarien ils ne veulent pas de vin rouge.*
- *3 votants approuvent $(f \vee v) \wedge (f \rightarrow w) \wedge (v \rightarrow r \vee w)$: ils ne veulent pas de viande ; avec le poisson ils veulent du vin blanc ; et avec le plat végétarien ils veulent du vin rouge ou de la bière.*
- *3 votants approuvent v : ils veulent le plat végétarien, avec n'importe quelle boisson.*

Le tableau suivant nous montre le nombre d'approbations de chaque menu :

	m	f	v
r	9	0	10
w	4	12	6
b	4	0	7

Le vainqueur est donc fw.

Le problème principal de cette méthode est que lorsqu'un votant obtient une valeur qu'il n'approuve pas pour une variable, alors son avis ne compte pas pour les autres variables. Cependant, certains votants pourraient avoir envie de s'exprimer sur la boisson même si le plat ne leur convient pas.

Un second problème de cette méthode est la complexité du langage de représentation. Cela peut être difficile pour un votant d'exprimer ses préférences à l'aide d'une formule propositionnelle, qui peut de plus être de taille exponentielle. Ce langage peut aussi conduire à une quantité de communication très élevée.

Remarquons aussi que calculer l'alternative vainqueur revient à résoudre un problème MAX SAT contraint ou un problème MAX SAT contraint et pondéré, si nous considérons des types de votes avec un nombre de votants pour chaque type de vote. Les menus vainqueurs sont alors les solutions du problème de MAX SAT contraint et pondéré suivant :

$$5 : (m \vee f) \wedge (m \rightarrow r) \wedge (f \rightarrow w)$$

$$4 : m \wedge b$$

$$4 : m \rightarrow (r \vee w) \wedge (f \rightarrow w) \wedge (v \rightarrow r \vee b)$$

$$3 : (f \vee v) \wedge (f \rightarrow w) \wedge (v \rightarrow r \vee w)$$

$$3 : v$$

sujet à la contrainte

$$(m \vee f \vee v) \wedge (r \vee w \vee b) \wedge (\bar{m} \vee \bar{f}) \wedge (\bar{f} \vee \bar{v}) \wedge (\bar{v} \vee \bar{m}) \wedge (\bar{r} \vee \bar{w}) \wedge (\bar{w} \vee \bar{b}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{r})$$

Ce problème est donc NP-difficile mais, dans le cas où il n'existe pas de contrainte, il possède un ratio d'approximation élevé, à savoir $\frac{2^k-1}{2^k}$ pour des instances avec des clauses de taille exactement k. Pour plus de précision sur le ratio d'approximation de ce problème, on pourra consulter Paschos (2004).

4.2.2 Approbation conditionnelle

Introduisons dans cette section l'approbation conditionnelle qui permet aux votants d'exprimer des préférences conditionnelles sur les variables.

Dans l'exemple 4.1, peut-être que les 3 derniers votants qui n'aiment pas la viande, ni le poisson, auraient voulu exprimer leur opinion sur la boisson, sachant que le plat n'est pas le plat végétarien. Par exemple, ils auraient pu approuver la bière sachant que le plat est de la viande ou du poisson. Cela aurait conduit aux préférences conditionnelles suivantes :

$$3 \ : \langle v, m : b, f : b, v : rwb \rangle$$

Cette approbation conditionnelle signifie que ces trois votants approuvent le plat végétarien ; sachant que le plat est de la viande ou du poisson, ils approuvent la bière ; et sachant que le plat est végétarien, ils approuvent toutes les boissons.

La notion de préférences conditionnelles se fonde sur l'*indépendance conditionnelle* des préférences, introduit par Keeney et Raiffa (1976). Considérons un domaine combinatoire de décision D composé par le produit cartésien d'un ensemble de variables X, une variable de ce domaine $X_i \in X$, un ensemble de variables $Y \subseteq X$, et le reste des variables $Z = X \setminus (\{X_i\} \cup Y)$. Nous notons D_Y, respectivement D_Z, la restriction de D aux variables de Y, respectivement de Z. On dit que X_i est préférentiellement indépendante de Y étant donné Z par rapport à $\succ$ si pour tout $x_i, x'_i \in D_i$, $\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y}' \in D_Y$, $\overrightarrow{z} \in D_Z$, nous avons $(x_i, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) \succ (x'_i, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ si et seulement si $(x_i, \overrightarrow{y}', \overrightarrow{z}) \succ (x'_i, \overrightarrow{y}', \overrightarrow{z})$. Cela signifie que les préférences sur l'ensemble des valeurs de X_i dépendent seulement des valeurs des variables de Z et ne dépendent pas des valeurs des variables de Y.

Maintenant, définissons formellement le vote par approbation conditionnelle :

Définition 4.1. *Un vote par approbation conditionnelle, défini sur un ensemble de p variables $X_1, \dots, X_p$ avec p domaines finis $D_1, \dots D_p$, est une paire $B = (G, \{A_i | i = 1 \dots p\})$, où :*

- *G est un graphe orienté sur $\{X_1, \dots, X_p\}$ représentant les dépendances préférentielles entre les variables ;*
- *pour chaque i, A_i est un ensemble d'approbations conditionnelles*

$$\{\overrightarrow{u} : a_i(\overrightarrow{u}) | \overrightarrow{u} \in Par_G(X_i)\}$$

  où $a_i(\overrightarrow{u}) \subseteq D_i$.

La notation $Par_G(X_i)$ désigne l'ensemble des parents de X_i dans le graphe G.

Le graphe orienté représente les *dépendances* qui existent entre les variables. Dans notre exemple du choix d'un menu, on peut considérer que le choix du plat ne dépend de rien et que le choix de la boisson dépend du plat. Cela nous conduit au graphe suivant :

$$X_1 \longrightarrow X_2$$

Potentiellement, chaque votant peut posséder son propre graphe de dépendances. Par exemple, on peut imaginer un votant qui fait dépendre le plat de la boisson (et non l'inverse comme supposé ci-dessus). Cependant, pour pouvoir agréger simplement un ensemble d'approbations conditionnelles, nous serons parfois amenés à faire l'hypothèse que tous les votants possèdent le même graphe de dépendances entre les variables.

L'exemple suivant nous donne un profil d'approbations conditionnelles possible, étant donné le graphe de dépendances précédent.

Exemple 4.2. *Considérons le domaine déjà mentionné, $D = \{m, f, v\} \times \{r, w, b\}$, et 19 votants. De plus, nous considérons le graphe de dépendances suivant :*

$$X_1 \longrightarrow X_2$$

Les approbations conditionnelles des votants sont les suivantes :

5	4	4	3	3
mf	m	mfv	fv	v
$m : r$	$m : b$	$m : rw$	$m : r$	$m : b$
$f : w$	$f : b$	$f : w$	$f : w$	$f : b$
$v : b$	$v : b$	$v : rb$	$v : rw$	$v : rwb$

Les cinq premiers votants approuvent la viande et le poisson, et sachant que le plat est la viande (respectivement le poisson, le plat végétarien), ils approuvent le vin rouge (respectivement le vin blanc, la bière) comme boisson.
Les trois derniers votants approuvent seulement le plat végétarien, mais sachant que le plat est de la viande, ils ont quand même leur mot à dire et approuvent la bière.

Notons que ces préférences conditionnelles sont moins informatives que les formules propositionnelles précédentes. De plus, il peut être gênant pour un votant d'approuver un ensemble de valeurs pour les variables si ses préférences ne sont pas compatibles avec le graphe de dépendances de l'élection. Considérons un votant possédant les préférences suivantes :

$$fw \succ vw \succ mr \succ vr \succ fb \succ vb \succ mb \succ fr \succ mw$$

Peu importe le seuil choisi, il sera difficile pour ce votant de décider quel plat approuver, parce que ses préférences sur le plat dépendent du vin. Le votant ci-dessous par contre :

$$fw \succ fr \succ mr \succ mw \succ vw \succ vr \succ fb \succ mb \succ vb$$

possède des préférences séparables, et n'a pas de problèmes pour approuver soit f soit fm.

Étant donnée une alternative $\overrightarrow{d} = (d_1, \ldots, d_p) \in D$, on dit que $\overrightarrow{d}$ est en désaccord avec un vote B sur X_i si $(d_U, d_i) \notin a_i(\overrightarrow{u})$, où $U = Par_G(X_i)$. Le désaccord de $\overrightarrow{d}$ par rapport à B, noté $\delta(\overrightarrow{d}, B)$, est égal au nombre de variables sur lesquelles $\overrightarrow{d}$ et B sont en désaccord. Par exemple, si $B = \langle mf, m : r, f : w, v : b \rangle$, et $\overrightarrow{d} = vb$ alors B et $\overrightarrow{d}$ sont en désaccord sur X_1 mais pas sur X_2, ce qui conduit à $\delta(\overrightarrow{d}, B) = 1$. De même, $\delta(mr, B) = 0$, et $\delta(vw, B) = 2$. Calculons les désaccords dans notre exemple du choix d'un menu commun :

Exemple 4.3. *Dans cet exemple, les issues admissibles sont* $\{m, m : r\}$, $\{m, m : w\}$, $\{m, m : b\}$, $\{f, f : r\}$, $\{f, f : w\}, \{f, f : b\}, \{v, v : r\}, \{v, v : w\}$ *et* $\{v, v : b\}$. *Avec les approbations conditionnelles précédentes, cela nous donne les désaccords suivants :*

δ	mr	mw	mb	fr	fw	fb	vr	vw	vb
5	0	1	1	1	0	1	2	2	1
4	1	1	0	2	2	1	2	2	1
4	0	0	1	1	0	1	0	1	0
3	1	2	2	1	0	1	0	0	1
3	2	2	1	2	2	1	0	0	0

On obtient donc une mesure du désaccord entre chaque votant et chaque alternative possible. Remarquons que cette mesure du désaccord est équivalente à la distance de Hamming lorsque toutes les variables sont binaires, et qu'il n'existe pas de dépendances entre les variables.

Un vote par approbation conditionnelle est dit *acyclique* simplement si G est acyclique. Lorsqu'un vote par approbation conditionnelle est acyclique, il existe toujours une alternative telle que le nombre de désaccord entre ce vote et cette alternative soit nul.

Observation 4.1. *Si* B *est acyclique et que pour tout* i, $a_i(\overrightarrow{u}) \neq \emptyset$, *alors il existe toujours une alternative* $\overrightarrow{d}$ *telle que* $\delta(\overrightarrow{d}, B) = 0$.

Cependant remarquons que si B n'est pas acyclique alors ce résultat n'est plus vrai. En effet, prenons par exemple un domaine composé de deux variables binaires, X et Y, et l'approbation conditionnelle $B = \langle x_1 : y_1, x_2 : y_2, y_1 : x_2, y_2 : x_1\rangle$. Alors pour tout $\overrightarrow{d} \in D$, on a $\delta(\overrightarrow{d}, B) = 1$. Ainsi, dans ce chapitre, nous ne considérons que les approbations conditionnelles acycliques.

4.2.2.a Préférences δ-cohérentes

De façon similaire au chapitre 3, nous ferons l'hypothèse (cohérente avec les règles proposées) que plus le nombre de désaccords entre une alternative et l'approbation conditionnelle d'un votant est faible, plus le votant apprécie cette alternative. De telles préférences sont dites δ-*cohérentes*. Formellement : pour tout $\overrightarrow{d}, \overrightarrow{f} \in D$, si $\delta(\overrightarrow{d}, P_i) < \delta(\overrightarrow{f}, P_i)$ alors $\overrightarrow{d} \succ_i \overrightarrow{f}$, c'est-à-dire, i préfère $\overrightarrow{d}$ à $\overrightarrow{f}$. Cela ne dit rien sur les préférences de i entre $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{f}$ lorsque $\delta(\overrightarrow{d}, P_i) = \delta(\overrightarrow{f}, P_i)$, mais nous n'en aurons jamais besoin. L'exemple 4.4 illustre la notion de δ-cohérence.

Exemple 4.4. *Par exemple, si* $P_i = \langle mf, m : r, f : w, v : b\rangle$, *alors on peut conclure que*

$$(mr) \sim_i (fw) \succ_i (mb) \sim_i (mw) \sim_i (fr) \sim_i (fb) \sim_i (vb) \succ_i (vr) \sim_i (vw)$$

On remarque que même si l'on parle de vote par approbation, les préférences des votants ne sont pas dichotomiques avec cette hypothèse. Étant donné un vote par approbation conditionnelle B, l'hypothèse de δ-cohérence débouche sur un pré-ordre total, que l'on notera $\succeq_B$. En fait, cela est déjà vrai dans le chapitre 3, nous utilisons le vote par approbation mais nous supposons que les préférences sont Hamming-cohérentes, ce qui nous conduit aussi à un pré-ordre total avec m classes d'équivalence, donc non dichotomique.

Avant de définir les règles minisum et minimax conditionnelles, explorons le lien étroit entre l'approbation conditionnelle et les CP-nets.

4.2.2.b Approbation conditionnelle et CP-nets

Le terme CP-net ("conditional preference network") désigne un langage de représentation compacte des préférences. Introduits par Boutilier et al. (2004), les CP-nets permettent de représenter de manière compacte l'*hypercube des préférences* associé à une relation de préférences sur un domaine D. Étant donnée une relation de préférences $\succ$ sur D, l'hypercube des préférences $\succ_H$ désigne la restriction de $\succ$ aux alternatives qui diffèrent seulement sur une variable (par exemple (mr) et (mw)).

Les CP-nets sont fondés sur la notion d'indépendance conditionnelle des préférences, présentée dans la section précédente.

Un CP-net C sur D consiste en deux éléments :

- un graphe G orienté sur X, représentant les dépendances préférentielles entre les variables de X : soit $Par_G(X_i)$, l'ensemble des parents de X_i dans le graphe G, alors la variable X_i est indépendante préférentiellement de $X \setminus (Par_G(X_i) \cup \{X_i\})$ étant donné $Par_G(X_i)$.
- pour chaque variable $X_i \in D$, un ensemble de préférences linéaires conditionnelles $\succ_i^{\overrightarrow{u}}$ pour tout $\overrightarrow{u} \in Par_G(X_i)$.

Étant donné un CP-net C sur D, nous en déduisons une relation de préférences sur l'hypercube de D, que nous noterons $\succ_C$. L'exemple suivant représente un CP-net, et la relation d'ordre partielle associée.

Exemple 4.5. *Considérons un domaine avec trois variables binaires, X_1, X_2, X_3. La figure suivante représente un CP-net :*

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & X_3 \\ x_1 \succ \bar{x_1} & & \begin{array}{c} x_1 : x_2 \succ \bar{x_2} \\ \bar{x_1} : \bar{x_2} \succ x_2 \end{array} & & \begin{array}{c} x_2 : x_3 \succ \bar{x_3} \\ \bar{x_2} : \bar{x_3} \succ x_3 \end{array} \end{array}$$

Ainsi, nous obtenons un ordre partiel sur D, qui contient par exemple :

$$(x_1 x_2 x_3) \succ_C (\bar{x_1} x_2 x_3)$$

et aussi :

$$(\bar{x_1} \bar{x_2} x_3) \succ_C (\bar{x_1} x_2 x_3)$$

Étant donné un vote par approbation B sur D, nous en déduisons un pré-ordre total $\succeq_B$ et étant donné un CP-net C sur D, nous pouvons en déduire un ordre partiel $\succ_C$. Quels sont alors les liens qui existent entre $\succeq_B$ et $\succ_C$?

Étudions un cas simple, où les variables sont binaires et où les votants ne peuvent approuver qu'une valeur d'une variable X_i pour chaque valeur de $\overrightarrow{u} \in Par_G(X_i)$. De plus considérons que le graphe de dépendances est acyclique. Avec ces simplifications, on observe qu'un vote par approbation B n'est compatible qu'avec un unique CP-net, C, basé sur le même graphe de dépendances.

Exemple 4.6. *Considérons le domaine précédent avec trois variables binaires, X_1, X_2, X_3, et le vote par approbation conditionnelle suivant :*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & X_2 \arrow[r] & X_3 \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} & & x_1x_2 : x_3 \\ & x_1 : x_2 & x_1\bar{x_2} : \bar{x_3} \\ x_1 & & \\ & \bar{x_1} : \bar{x_2} & \bar{x_1}x_2 : \bar{x_3} \\ & & \bar{x_1}\bar{x_2} : x_3 \end{array}$$

Ce vote est seulement compatible avec le CP-net suivant :

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & X_2 \arrow[r] & X_3 \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} & & x_1x_2 : x_3 \succ \bar{x_3} \\ & x_1 : x_2 \succ \bar{x_2} & x_1\bar{x_2} : \bar{x_3} \succ x_3 \\ x_1 \succ \bar{x_1} & & \\ & \bar{x_1} : \bar{x_2} \succ x_2 & \bar{x_1}x_2 : \bar{x_3} \succ x_3 \\ & & \bar{x_1}\bar{x_2} : x_3 \succ \bar{x_3} \end{array}$$

Même dans ce cas simple, le lien entre $\succeq_B$ et $\succ_C$ est ambigu. Tout d'abord, on a l'observation suivante :

Observation 4.2. *Étant donné un domaine D, soit B un vote par approbation conditionnelle acyclique et tel que pour toute variable X_i et pour tout $\overrightarrow{u} \in Par_G(X_i)$, $|a_i(\overrightarrow{u})| = 1$, et C, un CP-net compatible avec B, alors*

- *il existe une unique alternative $\overrightarrow{d^1}$ telle que $\overrightarrow{d^1} \succeq_B \overrightarrow{f}$, pour tout $\overrightarrow{f} \in D$,*
- *il existe une unique alternative $\overrightarrow{d^2}$ telle que $\overrightarrow{d^2} \succ_C \overrightarrow{f}$, pour tout $\overrightarrow{f} \in D$,*
- *et $\overrightarrow{d^1} = \overrightarrow{d^2}$.*

Dans l'exemple 4.6, nous avons $\overrightarrow{d^1} = \overrightarrow{d^2} = (x_1 x_2 x_3)$.
Cela signifie qu'étant donné un vote par approbation conditionnelle, la meilleure alternative pour ce vote est égale à la meilleure alternative pour un CP-net compatible.

Cependant, l'exemple 4.6 nous montre que $\succeq_B$ et $\succ_C$ peuvent conduire à des comparaisons contradictoires. En effet, dans cet exemple, comparons les deux alternatives $(x_1 \bar{x_2} x_3)$ et $(\bar{x_1} \bar{x_2} x_3)$. Tandis que le CP-net C conduit à

$$(x_1 \bar{x_2} x_3) \succ_C (\bar{x_1} \bar{x_2} x_3)$$

car $x_1 \succ \bar{x_1}$, le vote par approbation conduit à

$$(\bar{x_1} \bar{x_2} x_3) \succ_B (x_1 \bar{x_2} x_3)$$

car $\delta(\bar{x_1} \bar{x_2} x_3, B) < \delta(x_1 \bar{x_2} x_3, B)$.

Les CP-nets et les approbations conditionnelles sont donc deux notions similaires mais ne sont pas pour autant équivalentes.

Maintenant nous pouvons définir les règles minisum et minimax conditionnelles, en s'appuyant sur le désaccord entre un vote par approbation conditionnelle et une alternative.

4.2.2.c Minisum conditionnelle

Nous avons donc une mesure du désaccord entre une alternative $\overrightarrow{d}$ et une approbation conditionnelle B. Étant donné un profil d'approbations conditionnelles, comment agréger les désaccords de ce profil avec une alternative en un désaccord global pour l'alternative considérée ? Naturellement, nous pouvons commencer par définir le désaccord global d'une alternative comme la somme des désaccords engendrés par cette alternative, ce qui nous donne les scores suivant pour les issues admissibles :

	m	f	v
r	13	26	18
w	21	14	22
b	17	19	13

Étant donnés un profil d'approbations conditionnelle P et une alternative $\overrightarrow{d}$, nous définissons le score minisum de $\overrightarrow{d}$, noté $minisum(\overrightarrow{d}, P)$, comme la somme des désaccords de $\overrightarrow{d}$ et chaque vote du profil P, c'est-à-dire :

$$minimsum(\overrightarrow{d}, P) = \sum_{i \in N} \delta(\overrightarrow{d}, P_i)$$

Nous définissons la règle minisum conditionnelle qui choisit l'alternative qui possède le plus petit désaccord global. De manière formelle, $\overrightarrow{d}_*$ est une alternative vainqueur pour minisum conditionnelle si et seulement si :

$$minimsum(\overrightarrow{d}_*, P_i) = \min_{\overrightarrow{d} \in D} \sum_{i \in N} \delta(\overrightarrow{d}, P_i)$$

Avec les désaccords précédents, les menus vainqueurs ex aequo sont donc (mr) et (vb), avec un score minisum de 13.

De plus ajoutons que, dans le cas général, il existe une contrainte sur les issues admissibles ou non. Par exemple, considérons un domaine avec quatre variables binaires X_1, X_2, X_3, X_4 représentant quatre candidats pour seulement deux postes à pourvoir. Ici, il existe une contrainte, Γ, à satisfaire sur la taille des issues qui doit être égale à 2, soit $\Gamma = [2 : x_1 x_2 x_3 x_4]$.

Il est facile de voir que minisum conditionnelle est une généralisation de minisum [2] aux approbations conditionnelles. En effet, si les variables sont binaires et qu'il n'existe pas de dépendances entre elles, la mesure du désaccord est égale à la distance de Hamming, et minisum conditionnelle choisit alors l'alternative minimisant la somme des distances de Hamming au profil. De plus, en ajoutant une contrainte Γ sur la taille des ensembles admissibles, on obtient précisément la généralisation de minisum dans le cadre d'élections de comités de taille fixée.

4.2.2.d Minimax conditionnelle

Maintenant, nous souhaitons minimiser le désaccord de l'agent le moins satisfait. Avec les données précédentes, cela nous donne :

	m	f	v
r	2	2	2
w	2	2	2
b	2	1	1

Étant donnés un profil d'approbations conditionnelle P et une alternative $\overrightarrow{d}$, nous définissons le score minimax de $\overrightarrow{d}$, noté $minimax(\overrightarrow{d}, P)$, comme le maximum des désaccords de $\overrightarrow{d}$ et chaque vote du profil P, c'est-à-dire

$$minimax(\overrightarrow{d}, P) = \max_{i \in N} \delta(\overrightarrow{d}, P_i)$$

Nous définissons alors la règle minimax conditionnelle qui choisit l'alternative qui possède le plus petit désaccord maximal. De manière formelle, $\overrightarrow{d}_*$ est une alternative vainqueur pour minimax conditionnelle si et seulement si

$$minimax(\overrightarrow{d}_*, P_i) = \min_{\overrightarrow{d} \in D} \max_{i \in N} \delta(\overrightarrow{d}, P_i)$$

2. La règle minisum est définie en section 3.2.2.

Avec les désaccords précédents, les menus vainqueurs ex aequo sont donc (fb) et (vb). Ainsi, avec (fb), chaque votant est soit d'accord avec le poisson, soit d'accord avec le vin blanc sachant que le plat est le poisson.

De même, minimax conditionnelle est une généralisation de minimax [3] aux approbations conditionnelles. En effet, si les variables sont binaires et qu'il n'existe pas de dépendances entre elles, la mesure du désaccord est égal à la distance de Hamming, et minimax conditionnelle choisit alors l'alternative minimisant le maximum des distances de Hamming au profil. De plus, en ajoutant une contrainte Γ sur la taille des ensembles admissibles, on obtient précisément la généralisation de minimax dans le cadre d'élections de comités de taille fixée.

4.2.3 Vote séquentiel par approbation conditionnelle

Étant donné un ordre sur les variables, le vote séquentiel demande aux votants de s'exprimer sur les variables les unes après les autres. Dans la section 2.3.4, nous avons présenté un exemple de règle de vote par approbation qui s'effectue de manière séquentielle, l'approbation proportionnelle séquentielle. De façon similaire, nous définissons dans cette section le vote par approbation conditionnelle séquentielle (SCAV).

Avec la règle SCAV, les votants s'expriment à chaque tour en approuvant un ensemble de valeurs pour la variable considérée. À chaque tour, la valeur choisie est la valeur la plus approuvée et ce choix est communiqué à chaque votant avant le tour suivant. Cette méthode permet aux votants d'exprimer partiellement des préférences conditionnelles puisqu'ils s'expriment sur une variable étant donné le résultat des votes sur les variables précédentes.

Ajoutons que l'ordre sur les variables du vote séquentiel doit être tel qu'à un tour donné, les votants s'expriment sur une variable qui ne dépend que de variables dont la valeur est déjà fixée. Puisque nous considérons des approbations conditionnelles acycliques, il existe toujours un tel ordre, donné par le graphe des dépendances préférentielles.

Illustrons cette règle sur le profil d'approbations conditionnelle de l'exemple 4.2.

Exemple 4.7. *Considérons le domaine déjà mentionné, $D = \{m, f, v\} \times \{r, w, b\}$, et* 19 *votants. De plus, nous considérons le graphe de dépendances suivant :*

$$X_1 \longrightarrow X_2$$

Les approbations conditionnelles des votants sont les suivantes :

5	4	4	3	3
mf	m	mfv	fv	v
$m : r$	$m : b$	$m : rw$	$m : r$	$m : b$
$f : w$	$f : b$	$f : w$	$f : w$	$f : b$
$v : b$	$v : b$	$v : rb$	$v : rw$	$v : rwb$

3. La règle minimax est définie en section 3.2.2.

Le vainqueur pour le plat est la viande, m, avec 13 approbations. Ensuite, le vainqueur pour la boisson, sous la condition que le plat soit la viande, est le vin rouge, r. Finalement, le vainqueur du vote séquentiel par approbation conditionnelle est (mr).

Avec cet exemple, on comprend de plus que les votants n'ont pas besoin de fournir l'intégralité de leur vote par approbation conditionnelle, mais seulement, les valeurs qu'ils approuvent à chaque tour.

Puisque le vote séquentiel suit un ordre prédéfini sur les variables, il est nécessaire de supposer que l'ensemble des votants possèdent le même graphe de dépendances et que ce graphe n'est pas en contradiction avec l'ordre du vote, c'est-à-dire qu'il n'existe pas dans le graphe de dépendances un arc qui soit dans le sens inverse de l'ordre du vote.

4.3 Vote par approbation conditionnelle non-séquentiel

Dans cette section, nous étudions les règles minisum et minimax conditionnelles. Nous commençons par étudier la complexité de calcul de minisum conditionnelle. Puis nous étudions le lien entre ces deux règles en mesurant la proximité de leurs résultats. Nous calculons le rapport entre les scores minisum des issues vainqueurs pour minimax et pour minisum conditionnelles. Puis nous étudions les propriétés axiomatiques de ces règles et finalement leur manipulation, en les considérant, dans le deux cas, résolues par un mécanisme de départage des ex aequo et irrésolues à l'aide d'un principe d'extension des préférences.

4.3.1 Complexité de calcul

Tout d'abord, commençons par rappeler que la règle minimax est NP-difficile à calculer, comme on l'a vu dans le chapitre 3. Cela implique que la règle minimax conditionnelle est de même difficile à calculer.

Cependant, la règle minisum se calcule en temps polynomial, ainsi nous savons rien sur la complexité de calcul d'une alternative vainqueur pour minisum conditionnelle. Le théorème et la preuve qui le suit nous montrent que le problème de décision associé au calcul d'une alternative vainqueur pour minisum conditionnelle est NP-complet.

Nous allons maintenant définir le problème de décision associé à minisum conditionnelle et montrer qu'il est NP-complet.

D-Minisum Conditionnelle : Étant donnés un profil de vote par approbation conditionnelle, P, et un entier k, existe-t-il une alternative $\overrightarrow{d}$ telle que $\delta(\overrightarrow{d}, P_i) \leq k$?

Théorème 7. *D-Minisum Conditionnelle est NP-complet, même lorsque les variables sont binaires et le graphe de dépendances acyclique.*

Preuve. Le problème est clairement dans NP. La preuve est basée sur une réduction depuis le problème Max 2SAT.

Une instance de Max 2SAT est définie par un ensemble $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de n variables binaires et un ensemble $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$ de m clauses, chacune de taille 2. L'objectif est de trouver une affectation des variables qui maximise le nombre de clauses satisfaites. Bien sûr, nous considérons le problème décisionnel associé, qui étant donné un entier k se demande s'il existe une affectation des variables telle qu'au moins k clauses soit satisfaites.

Considérons une instance I de Max 2SAT définie par un ensemble de n variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et un ensemble de m clauses $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$, et un entier k. Nous construisons une instance I' de D-Minisum Conditionnelle comme suit. Nous créons un ensemble de n variables $Y = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ et un ensemble de m votants $M = \{1, \ldots, m\}$. Le graphe de dépendances est tel que pour tout couple d'entiers i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$, on a :

$$Y_i \longrightarrow Y_j$$

Les m votants sont définis à partir des clauses. À chaque clause C_i, nous associons un votant i. Notons j et j', les deux entiers tels que $x_j \in C_i$, $x_{j'} \in C_i$ et $j < j'$. Alors, le vote P_i associé au votant i est défini comme suit :

- pour tout entier ℓ, $1 \leq \ell \leq n$ tel que $\ell \neq j'$, le votant i approuve y_ℓ et $\bar{y_\ell}$,
- et pour j', on a $y_j : y_{j'}, \bar{y_{j'}}$, et $\bar{y_j} : y_{j'}$.

Cela signifie que le votant i approuve toutes les valeurs des variables Y_ℓ pour $\ell \neq j'$, et qu'il n'existe qu'une dépendance de $Y_{j'}$ à Y_j, qui conduit le votant à approuver $y_{j'}$ et $\bar{y_{j'}}$ lorsqu'on a y_j et seulement $y_{j'}$ lorsqu'on a $\bar{y_j}$. Finalement, on pose $k' = m - k$.

Maintenant nous allons montrer que I est une instance positive si et seulement si I' est une instance positive, c'est-à-dire, qu'il existe une affectation des variables X qui satisfait au moins k clauses si et seulement s'il existe une alternative $\overrightarrow{d}$ telle que $\sum_{i \in M} \delta(\overrightarrow{d}, P_i) \leq m - k$.

Dans un premier temps, supposons que I est une instance positive. Il existe donc une affectation des variables telle qu'au moins k clauses sont satisfaites. À partir de cette affectation, nous construisons une alternative $\overrightarrow{d}$ pour l'instance I de la manière suivante :

$$\overrightarrow{d}_i = \begin{cases} y_i & \text{si } x_i \text{ est vrai,} \\ \bar{y_i} & \text{si } x_i \text{ est faux.} \end{cases}$$

Étudions alors le nombre de désaccords entre un votant i et l'alternative $\overrightarrow{d}$ obtenue. Il y a deux cas à considérer :

- Si la clause C_i est satisfaite, cela signifie que soit x_j est vrai, soit $x_{j'}$ est vrai. Ainsi, étant donnée la définition de P_i, on a $\delta(\overrightarrow{d}, P_i) = 0$.

- Si la clause C_i n'est pas satisfaite, cela signifie que x_j et $x_{j'}$ sont faux. Alors, étant donnée la définition de P_i, on obtient $\delta(\overrightarrow{d}, P_i) = 1$.

Ainsi, puisque l'affectation satisfait au moins k clauses, on obtient $\sum_{i \in M} \delta(\overrightarrow{d}, P_i) \leq m - k$.

Dans un second temps, supposons que I' est une instance positive. Il existe donc une alternative $\overrightarrow{d}$ telle que $\sum_{i \in M} \delta(\overrightarrow{d}, P_i) \leq m - k$. À partir de cette alternative, nous créons une affectation pour I' de la manière suivante :

$$x_i = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } y_i \in \overrightarrow{d}, \\ \text{faux} & \text{si } \bar{y}_i \in \overrightarrow{d}. \end{cases}$$

Étudions alors le nombre de clauses que satisfait cette affectation. Puisque $\overrightarrow{d}$ est une solution pour I', il existe au moins k votes avec un nombre de désaccords égal à 0 avec $\overrightarrow{d}$. D'après la définition de P, cela signifie qu'il existe au moins k clauses satisfaites. Donc l'alternative $\overrightarrow{d}$ est une solution pour l'instance I. $\square$

Ceci montre donc que le problème de détermination d'un vainqueur est difficile pour minisum conditionnelle, même lorsque les variables sont binaires et que le graphe de dépendances est acyclique. La règle minisum devient donc difficile à calculer lorsque l'on utilise des approbations conditionnelles.

Cependant, comme on peut le voir dans la preuve suivante, il existe une réduction depuis le problème de minisum conditionnelle vers le problème de satisfaction maximal (MAX SAT). Cela signifie que nous pouvons résoudre minisum conditionnelle à l'aide des solveurs de MAX SAT. De plus, dans le cas où les variables sont binaires, cette réduction affine préserve le ratio d'approximation différentielle[4] de $4.34/(m + 4.34)$ obtenu pour MAX SAT par Escoffier et Paschos (2007).

Proposition 4.1. *Étant donné un profil d'approbations conditionnelles, portant sur m variables binaires, avec un graphe de dépendance acyclique G, Minisum Conditionnelle est approximable avec un ratio d'approximation différentielle de $4.34/(m' + 4.34)$, où $m' = n \cdot \sum_{j=1}^{m} 2^{|Par_G(Y_j)|}$.*

Preuve. Cette preuve est fondée sur une réduction du problème d'optimisation Minisum Conditionnelle vers le problème d'optimisation MAX SAT.

Une instance de Minisum Conditionnelle est définie par un ensemble de m variables $Y = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$, supposées binaires, un ensemble de n votants $N = \{1, \ldots, n\}$ et un profil d'approbations conditionnelles, P, fondé sur un graphe de dépendances acyclique. Le problème est de déterminer une alternative qui minimise le nombre de désaccords avec le profil P.

4. Étant donnée une instance d'un problème d'optimisation combinatoire I, le ratio d'approximation différentielle mesure "la position relative de la valeur d'une solution approchée dans l'intervalle de la valeur de la pire solution de I et de la valeur de la meilleure solution de I", Escoffier et Paschos (2007).

Une instance de MAX SAT est définie par un ensemble X de variables binaires et un ensemble C de clauses. L'objectif est de trouver une affectation des variables qui maximise le nombre de clauses satisfaites.

Considérons une instance I de Minisum Conditionnelle, définie par un ensemble de m variables $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ et un ensemble de n votants $N = \{1, \ldots, n\}$, et un profil d'approbations conditionnelles P. Nous construisons une instance I' de MAX SAT comme suit. Nous créons un ensemble de m variables $X = \{X_1, \ldots, X_m\}$ et un ensemble de m' clauses $C = \{C_1, \ldots, C_{m'}\}$, où $m' = n \cdot \sum_{j=1}^{m} 2^{|Par_G(Y_j)|}$. Les clauses sont définies à partir des approbations conditionnelles. À chaque approbation conditionnelle P_i, nous associons un ensemble de clauses C_{P_i} : pour chaque variable Y_j et pour chaque $\overrightarrow{u} \in Par_G(Y_j)$, nous ajoutons une des clauses suivantes :

$$\begin{cases} \bigvee_{z \in \overrightarrow{u}} \bar{z} \vee y_j & \text{si } \overrightarrow{u} : x_i \in P_i, \\ \bigvee_{z \in \overrightarrow{u}} \bar{z} \vee \bar{y_j} & \text{si } \overrightarrow{u} : \bar{x_i} \in P_i, \\ \bigvee_{z \in \overrightarrow{u}} \bar{z} \vee y_j \vee \bar{y_j} & \text{si } \overrightarrow{u} : x_i, \bar{x_i} \in P_i. \end{cases}$$

Ces clauses correspondent respectivement à la forme disjonctive des clauses $\bigwedge_{z \in \overrightarrow{u}} z \to y_j$, $\bigwedge_{z \in \overrightarrow{u}} z \to \bar{y_j}$ et $\bigwedge_{z \in \overrightarrow{u}} z \to y_j \vee \bar{y_j}$.

Nous obtenons donc bien une instance du MAX SAT, avec un nombre de clauses égal à $n \cdot \sum_{j=1}^{m} 2^{|Par_G(Y_j)|}$.

Maintenant nous allons montrer qu'il existe une alternative $\overrightarrow{d}$ pour l'instance I avec un nombre de désaccords égal à α si et seulement s'il existe une affectation pour l'instance I' qui vérifie $m' - \alpha$ clauses.

Dans un premier temps, supposons qu'il existe une alternative $\overrightarrow{d}$ pour l'instance I avec un nombre de désaccords égal à α. À partir de cette alternative, nous construisons une affectation des variables pour I' de la manière suivante :

$$x_i = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } y_i \in \overrightarrow{d}, \\ \text{faux} & \text{si } \bar{y_i} \in \overrightarrow{d}. \end{cases}$$

Étudions maintenant le nombre de clauses vérifiées par cette affectation. Par construction des clauses, pour tout vote P_i, on obtient $\delta(\overrightarrow{d}, P_i) = \ell$ si et seulement si le nombre de clauses non vérifiées de l'ensemble C_{P_i} est égal à ℓ. Ainsi, le nombre de clauses non vérifiées par l'affectation définie est égal à $\sum_{i \in N} \delta(\overrightarrow{d}, P_i)$, ce qui implique que le nombre de clauses vérifiées est de $m' - \sum_{i \in N} \delta(\overrightarrow{d}, P_i)$, c'est-à-dire $m' - \alpha$.

Inversement, supposons qu'il existe une affectation vérifiant $m' - \alpha$ clauses. À partir de cette affectation des variables X, nous construisons une alternative $\overrightarrow{d}$ pour l'instance I de la manière suivante :

$$\overrightarrow{d}_i = \begin{cases} y_i & \text{si } x_i \text{ est vrai,} \\ \bar{y}_i & \text{si } x_i \text{ est faux.} \end{cases}$$

Avec une argumentation similaire, nous montrons que l'alternative $\overrightarrow{d}$ obtenue est telle que $\sum_{i \in N} \delta(\overrightarrow{d}, P_i) = \alpha$.

Finalement, étudions les ratios d'approximation différentielle de ces deux problèmes. Définissons $OPT(I)$, respectivement $\omega(I)$, comme la valeur de la meilleure, respectivement la pire, solution pour une instance I, et notons $v(S, I)$ le score d'une solution S de I. Nous savons qu'étant donnée une alternative $\overrightarrow{d}$ pour I avec un nombre de désagréments α, il existe une solution X pour I' qui satisfait au moins $m' - \alpha$ clauses. Alors, avec cette réduction, nous obtenons les relations suivantes :

$$OPT(I') = m' - OPT(I)$$

$$\omega(I') = m' - \omega(I)$$

$$v(S', I') = m' - v(S, I)$$

Dans Escoffier et Paschos (2007), il est montré que le ratio d'approximation différentielle pour MAX SAT est $4.34/(m' + 4.34)$, où m' est le nombre de clauses. Cela signifie que l'on peut trouver en temps polynomial une solution S' pour I' telle que :

$$\frac{v(S', I') - \omega(I')}{OPT(I') - \omega(I')} \geq \frac{4.34}{m' + 4.34}$$

Avec cette inégalité et les relations précédentes, nous obtenons :

$$\frac{\omega(I) - v(S, I)}{\omega(I) - OPT(I)} \geq \frac{4.34}{m' + 4.34}$$

avec $m' = n \cdot \sum_{j=1}^{m} 2^{|Par_G(Y_j)|}$. □

En résumé, déterminer un vainqueur pour la règle minisum conditionnelle est montré NP-difficile, mais nous obtenons un résultat positif d'approximation différentielle. De plus, nous pouvons résoudre exactement une instance de Minimax Conditionnelle à l'aide des solveurs existants pour MAX SAT.

4.3.2 Proximité des solutions de minimax et minisum conditionnelles

Dans cette section, nous étudions le lien entre les alternatives vainqueurs de minimax et minisum conditionnelles. Pour ce faire, nous calculerons le score minisum maximal d'une alternative vainqueur pour minimax.

Dans un premier temps, considérons un domaine composé de deux variables binaires, $X \times Y$, avec une dépendance $X \rightarrow Y$, un profil de préférences P et n votants. Supposons que $(x_1 y_1)$ est l'alternative vainqueur pour minimax, nous avons :

- si $minimax((x_1y_1), P) = 0$, alors cela signifie que chaque votant est satisfait par x_1 et par $x_1 : y_1$. Cela implique que le score minisum de (x_1y_1) est égal à 0.
- si $minimax((x_1y_1), P) = 1$, alors cela signifie qu'il existe au moins un votant qui n'est pas satisfait par x_1 ou par $x_1 : y_1$ et il n'en existe pas qui ne soit pas satisfait par au moins un des deux termes. Ainsi, nous obtenons $1 \leq minisum((x_1y_1), P) \leq n$.
- si $minimax((x_1y_1), P) = 2$, alors cela signifie qu'il existe au moins un votant qui n'est satisfait ni par x_1, ni par $x_1 : y_1$. Cela implique $2 \leq minisum((x_1y_1), P) \leq 2 \cdot n$.

En généralisant cette remarque, nous obtenons :

Proposition 4.2. *Considérons un domaine composé de p domaines D_i, avec $|D_i| = \alpha_i$, $i = 1 \ldots p$, un profil P et n votants. Étant donnée une alternative $\overrightarrow{d}$, si $minimax(\overrightarrow{d}, P) = \beta$, pour $0 \leq \beta \leq p$, alors $\beta \leq minisum(\overrightarrow{d}, P) \leq \beta \cdot n$.*

Preuve. Considérons un domaine composé de p domaines D_i, avec $|D_i| = \alpha_i$, $i = 1 \ldots p$, un profil P et n votants. De plus, considérons les dépendances suivantes entre les variables :

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_p$$

Supposons que $(x_1^1 x_1^2 \ldots x_1^p)$ est l'alternative vainqueur pour minimax. Alors, si on a

$$minimax((x_1^1 x_1^2 \ldots x_1^p), P) = \beta$$

cela signifie qu'il existe au moins un votant qui n'est pas satisfait par β éléments de $\{x_1^1, x_1^1 : x_1^2, \ldots, x_1^1 x_1^2 \ldots : x_1^p\}$, et il n'existe pas de votants en désaccord sur plus de β éléments de $\{x_1^1, x_1^1 : x_1^2, \ldots, x_1^1 x_1^2 \ldots : x_1^p\}$. Cela implique que

$$\beta \leq minisum((x_1^1 x_1^2 \ldots x_1^p), P) \leq \beta \cdot n$$

□

Ce résultat implique que l'alternative vainqueur pour minimax avec un score β possède au pire un score minisum égal à $\beta \cdot n$, et qu'il n'existe pas d'alternative vainqueur pour minisum avec un score inférieur à β (sinon cette alternative aurait un score minimax inférieur à β). Ainsi, le ratio maximal théorique entre les scores minisum d'une alternative vainqueur pour minimax et d'une alternative vainqueur pour minisum est égal à n. Ce ratio est en fait atteint par un exemple, présenté dans la preuve de la propriété suivante.

Théorème 8. *Étant donnés un domaine composé de p domaines D_i, avec $|D_i| = \alpha_i$ pour $i = 1 \ldots p$, un profil P et n votants, le ratio maximal entre les scores minisum d'une alternative vainqueur pour minimax et d'une alternative vainqueur pour minisum est égal à n.*

Preuve. La proposition 4.2 prouve que le ratio annoncé est au moins un majorant. Maintenant, nous montrons que ce ratio est atteint si que $\beta \leq p/2$.

Considérons un domaine composé de p domaines D_i, avec $|D_i| = \alpha_i$, $i = 1 \dots p$, un profil P et n votants. De plus, considérons les dépendances suivantes entre les variables :

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_p$$

Les approbations conditionnelles P des votants sont définies de la façon suivante :

- $(n-1)$ votants approuvent les 2es valeurs de tout domaine D_i pour $i = 1 \dots \beta$. Pour $i = \beta+1 \dots p$, ces votants approuvent les 1res valeurs de tout domaine, excepté quand elles sont conditionnées seulement par les 2es valeurs des domaines précédents, dans ce cas, ils approuvent les 2es valeurs.
- 1 votant approuve les 1res valeurs de tout domaine, pour $i = 1 \dots \beta$. Et, pour $i = \beta + 1 \dots p - \beta$, ce votant approuve les 1res valeurs de tout domaine, excepté quand elles sont conditionnées seulement par les 2es valeurs des domaines précédents, dans ce cas, il approuve les 2es valeurs. Finalement, pour $i = p - \beta + 1 \dots p$, ce votant approuve les 2es valeurs de tout domaine D_i.

Ces approbations conditionnelles sont résumées dans le tableau suivant :

$n-1$	1
x_2^1	x_1^1
$x_1^1 : x_2^2$	$x_1^1 : x_1^2$
$x_2^1 : x_2^2$	$x_2^1 : x_1^2$
$\vdots$	$\vdots$
$x_{\alpha_1}^1 : x_2^2$	$x_{\alpha_1}^1 : x_1^2$
$\vdots$	$\vdots$
$x_1^1 x_1^2 \dots x_1^\beta : x_1^{\beta+1}$	$x_1^1 x_1^2 \dots x_1^\beta : x_1^{\beta+1}$
$x_2^1 x_2^2 \dots x_2^\beta : x_2^{\beta+1}$	$x_2^1 x_2^2 \dots x_2^\beta : x_2^{\beta+1}$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$x_1^1 x_1^2 \dots x_1^{p-\beta} : x_2^{p-\beta+1}$
$\vdots$	$x_2^1 x_2^2 \dots x_2^{p-\beta} : x_2^{p-\beta+1}$
$\vdots$	$\vdots$

Tout d'abord, remarquons qu'il n'existe pas de votant qui approuve une valeur d'une variable qui soit différente de 1 ou 2. Ainsi, les alternatives vainqueurs pour minimax et pour minisum ne contiennent pas de valeurs qui diffèrent de 1 ou 2.

En particulier, nous étudions deux alternatives $\overrightarrow{v} = (x_1^1 x_1^2 \dots x_1^p)$ et $\overrightarrow{w} = (x_2^1 x_2^2 \dots x_2^p)$. Leurs scores sont résumés dans le tableau suivant :

	minimax	*minisum*
$\overrightarrow{v}$	β	$\beta \cdot n$
$\overrightarrow{w}$	β	β

Maintenant, montrons que les deux alternatives $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont des alternatives vainqueurs respectivement pour minimax et minisum. Pour ce faire, prouvons qu'il n'existe pas d'alternative avec un score minimax strictement plus petit que β.
Supposons qu'il existe une alternative $\overrightarrow{y}$ telle que $minimax(\overrightarrow{y}, P) < \beta$, c'est-à-dire que le nombre de désaccords entre $\overrightarrow{y}$ et chaque votant doit être strictement inférieur à β. En particulier, avec le votant isolé, cela implique :

$$|\{i|i \leq \beta, \overrightarrow{y}_i = x_2^i\}| + |\{i|i \geq p - \beta + 1, \overrightarrow{y}_i = x_1^i\}| < \beta. \tag{4.1}$$

Et, avec les $n-1$ votants, si $\overrightarrow{y}$ n'est pas égal à $(x_2^1 x_2^2 \ldots x_2^p)$, alors on a :

$$|\{i|i \leq \beta, \overrightarrow{y}_i = x_1^i\}| + |\{i|i \geq p - \beta + 1, \overrightarrow{y}_i = x_2^i\}| < \beta \tag{4.2}$$

Si $\overrightarrow{y}$ est égal à $(x_2^1 x_2^2 \ldots p_2)$ alors son score minimax maximal est égal à β. Ainsi, supposons que $\overrightarrow{y}$ n'est pas égal à $(x_2^1 x_2^2 \ldots x_2^p)$. L'alternative $\overrightarrow{y}$ doit satisfaire les deux équations 4.1 et 4.2, ce qui est impossible. Alors, il n'existe pas d'alternatives avec un score minimax strictement inférieur à β.

En conséquence, $\overrightarrow{v}$ est une alternative vainqueur pour minimax, avec un mécanisme de départage des ex aequo si nécessaire. De plus, puisqu'il n'existe pas d'alternative avec un score minimax inférieur à β, cela implique, grâce à la proposition 4.2, qu'il n'existe pas d'alternative avec un score minisum inférieur à β. Ainsi, $\overrightarrow{w}$ est une alternative vainqueur pour minisum, avec un départage des ex aequo en sa faveur si nécessaire. Finalement, le ratio de n est atteint. $\square$

Remarquons tout d'abord que dans l'exemple de la preuve précédente, les règles de minisum et de minimax conditionnelles conduisent à des alternatives vainqueurs totalement différentes. De plus le ratio entre les scores minisum de ces alternatives ne dépend que du nombre de votants et ne dépend pas du nombre de variables ni du nombre de valeurs pour ces variables. Ainsi, plus le nombre de votants est grand, plus l'écart de satisfaction entre une alternative vainqueur pour minimax et une alternative vainqueur pour minisum est élevé.

En résumé, nous avons montré que, d'une part, il existe des profils pour lesquels minisum et minimax conditionnelles débouchent sur des issues totalement opposées, et que, d'autre part, le ratio maximal entre les score minisum d'une alternative vainqueur pour minimax et d'une alternative vainqueur pour minisum est égal à n.

4.3.3 Propriétés axiomatiques

Poursuivons l'étude de ces règles en observant les propriétés axiomatiques qu'elles vérifient ou qu'elles violent. Certaines propriétés adaptées aux règles de votes à vainqueurs multiples sont énoncées en section 2.3.6. Dans le cadre du vote par approbation, ces propriétés ont besoin d'être adaptées. Les propriétés suivantes sont énoncées pour une règle de vote par approbation, r, à vainqueurs multiples et résolue. De plus, il est fait l'hypothèse que les préférences des votants sont δ-cohérentes.

Anonymat Pour tout profil P et toute permutation des votes σ, $r(P) = r(\sigma(P))$.

Consistance Pour tout couple de profils disjoints (donnés par deux électorats disjoints) P et P', si $r(P) = r(P')$, alors $r(P \cup P') = r(P) = r(P')$.

Participation Pour tout profil P et tout votant $i \notin N$, $r(P \cup v_i) \succ_i r(P)$, où $\succ_i$ sont des préférences δ-cohérentes.

Monotonie Pour tout profil P, toute variable X_i et toute valeur $a_i \in D_i$, si $a_i \in r(P)$, alors pour tout profil P' obtenu depuis P en augmentant le nombre de votants qui approuvent a_i d'une unité, on a soit $a_i \in r(P') = r(P)$ (monotonie forte) ou $a_i \in r(P')$ (monotonie faible).

Résistance aux clones Considérons un profil P sur un domaine composé de p variables X_i pour $i = 1 \ldots p$ et le profil P' dérivé [5] de P sur D', où D' est composé des p variables de D telles que pour une variable X_i, on ajoute un clone a' de la valeur a que peut prendre X_i. La règle r est résistante aux clones si $a \notin r(P)$, alors $a \notin r(P')$ et $a' \notin r(P')$; et si $a \in r(P)$ alors $a \in r(P')$ ou $a' \notin r(P')$.

Ces propriétés sont énoncées pour des règles de votes résolues, mais certaines d'entre elles s'adaptent naturellement pour traiter le cas des règles irrésolues. Nous en étudions deux qui sont énoncées pour une règle de vote par approbation, r, à vainqueurs multiples et irrésolue.

Consistance irrésolue Pour tout couple de profils disjoints (donnés par deux électorats disjoints) P et P', si $r(P) \cap r(P') \neq \emptyset$, alors soit $r(P) \cap r(P') = r(P \cup P')$ (consistance forte), soit $r(P) \cap r(P') \subseteq r(P \cup P')$ (consistance faible).

E-participation Pour tout profil P, tout principe d'extension E, il n'existe pas de votant $i \notin N$ tel que $r(P) \succ_i^E r(P \cup \{v_i\})$, où $\succ_i^E$ est déduit de $\succ_i$ en utilisant le principe d'extension E [6].

Avant d'étudier le comportement de ces règles vis-à-vis des propriétés citées, rappelons qu'elles généralisent les règles minisum et minimax définies dans le cadre des élections de comités. Ainsi, lorsque minisum (respectivement minimax) conditionnelle vérifie une propriété axiomatique, minisum (respectivement minimax) vérifie aussi cette propriété.

5. P' est dérivé à l'aide de certaines hypothèses sur le comportement des votants. Sans restriction sur le nombre d'approbation, nous supposerons qu'un votant approuve la valeur a de la variable X_i dans P si et seulement s'il approuve les valeurs a et a' de X_i dans P'.

6. Les principes d'extension des préférences sont définis en section 2.5.1.b.

De même, lorsque minisum (respectivement minimax) ne vérifie pas une propriété alors minisum (respectivement minimax) conditionnelle ne la vérifie pas non plus.

Commençons par étudier l'anonymat.

Proposition 4.3. *Minisum et minimax conditionnelles vérifient l'anonymat.*

Preuve. La preuve est directe. □

Bien sûr, nous savons que minisum et minimax sont aussi anonymes dans le cadre des élections à vainqueurs multiples. Passons à l'étude de la consistance.

Proposition 4.4. *Minisum et minimax conditionnelles vérifient la consistance si T est un ordre linéaire sur D.*

Preuve. Tout d'abord, étudions le cas de minisum. Soient P et P' deux profils tels que $minisum(P) = minisum(P') = \overrightarrow{d_*}$. Notons que, par définition de minisum conditionnelle, on a $minisum(\overrightarrow{d}, P \cup P') = minisum(\overrightarrow{d}, P) + minisum(\overrightarrow{d}, P')$, pour toute alternative $\overrightarrow{d} \in D$. Supposons qu'il existe $\overrightarrow{d} \in D$ tel que $\overrightarrow{d} \neq \overrightarrow{d}_*$ et $\overrightarrow{d} = minisum(P \cup P')$. Deux cas sont alors à considérer :

- Soit $minisum(\overrightarrow{d}, P) < minisum(\overrightarrow{d_*}, P)$ ou $minisum(\overrightarrow{d}, P') < minisum(\overrightarrow{d_*}, P')$. Dans les deux cas, cela contredit la définition de $\overrightarrow{d}_*$.
- Soit $minisum(\overrightarrow{d}, P) = minisum(\overrightarrow{d_*}, P')$ et $minisum(\overrightarrow{d}, P') = minisum(\overrightarrow{d_*}, P')$. Alors, puisque $\overrightarrow{d}_*$ est vainqueur pour P et pour P', nous avons $\overrightarrow{d_*} \succ_T \overrightarrow{d}$. Ainsi $\overrightarrow{d}$ ne peut pas être vainqueur pour $P \cup P'$.

Maintenant, étudions le cas de minimax avec une argumentation similaire. Soient P et P' deux profils tels que $minimax(P) = minimax(P') = \overrightarrow{d_*}$. Notons cette fois que, par définition de minimax conditionnelle, pour toute alternative $\overrightarrow{d} \in D$, on a :

$$minimax(\overrightarrow{d}, P \cup P') = \max\{minimax(\overrightarrow{d}, P); minimax(\overrightarrow{d}, P')\}$$

Supposons qu'il existe $\overrightarrow{d} \in D$ tel que $\overrightarrow{d} \neq \overrightarrow{d}_*$ et $\overrightarrow{d} = minimax(P \cup P')$. Deux cas sont alors à considérer :

- Soit $minimax(\overrightarrow{d}, P) < minimax(\overrightarrow{d_*}, P)$ ou $minimax(\overrightarrow{d}, P') < minimax(\overrightarrow{d_*}, P)$, mais cela contredit la définition de $\overrightarrow{d}_*$.
- Soit $minimax(\overrightarrow{d}, P) = minimax(\overrightarrow{d_*}, P)$ ou $minimax(\overrightarrow{d}, P') = minimax(\overrightarrow{d_*}, P')$. Mais puisque $\overrightarrow{d}_*$ est vainqueur pour P et pour P', nous avons $\overrightarrow{d_*} \succ_T \overrightarrow{d}$. Ainsi $\overrightarrow{d}$ ne peut pas être vainqueur pour $P \cup P'$.

□

Ce résultat positif s'étend donc à minisum et minimax, et ces deux règles vérifient donc la consistance résolue. Pour la consistance irrésolue, les résultat ne sont pas similaires.

Proposition 4.5. *Minisum conditionnelle vérifie la consistance irrésolue forte.*

Preuve. Supposons que minisum conditionnelle ne vérifie pas la consistance irrésolue. Alors, il existe deux profils disjoints P et P', tels que $minisum(P) \cap minisum(P') \neq \emptyset$, et $minisum(P \cup P') \neq minisum(P) \cap minisum(P')$. Sans perte de généralité, considérons une alternative $\overrightarrow{y}$ telle que $\overrightarrow{y} \notin minisum(P)$ mais $\overrightarrow{y} \in minisum(P \cup P')$. Puisque $\overrightarrow{y} \in minisum(P \cup P')$, nous avons que, pour tout $\overrightarrow{x} \in minisum(P) \cap minisum(P')$, le score minisum de $\overrightarrow{y}$ dans $P \cup P'$ est inférieur ou égal au score minisum de $\overrightarrow{x}$ dans $P \cup P'$:

$$minisum(\overrightarrow{y}, P \cup P') \leq minisum(\overrightarrow{x}, P \cup P')$$

Et puisque $\overrightarrow{y} \notin minisum(P)$, nous savons que pour tout $\overrightarrow{x} \in minisum(P) \cap minisum(P')$, le score minisum de $\overrightarrow{y}$ dans P est strictement supérieur au score minisum de $\overrightarrow{x}$ dans P :

$$minisum(\overrightarrow{y}, P) > minisum(\overrightarrow{x}, P).$$

Or, nous savons que $minisum(\overrightarrow{d}, P \cup P') = minisum(\overrightarrow{d}, P) + minisum(\overrightarrow{d}, P')$, pour toute alternative $\overrightarrow{d} \in D$. Ainsi, les deux équations précédentes impliquent :

$$minisum(\overrightarrow{y}, P') < minisum(\overrightarrow{x}, P'),$$

ce qui contredit $\overrightarrow{x} \in minisum(P')$, et donc aussi $\overrightarrow{x} \in minisum(P) \cap minisum(P')$. □

De même, ce résultat s'étend pour minisum. Cependant, nous obtenons un résultat négatif pour minimax qui s'étend naturellement à minimax conditionnelle.

Proposition 4.6. *Minimax ne vérifie pas la consistance irrésolue forte.*

Preuve. La preuve est un contre-exemple. Considérons un ensemble de quatre votants $N = \{1, 2, 3, 4\}$ et trois candidats $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Les préférences des votants sont les suivantes :

$$\begin{array}{rl} P_1 : & (101) \\ P_2 : & (001) \\ P_3 : & (110) \\ P_4 : & (001) \end{array}$$

Maintenant considérons deux profils de vote $P = \{P_1, P_2\}$ et $P' = \{P_3, P_4\}$. Le tableau suivant résume les distances de Hamming et les scores minimax des comités pour les profils P, P' et $P \cup P'$.

$H(c, P_i)$	1	2	3	4	max_P	$max_{P'}$	$max_{P \cup P'}$
000	2	1	2	1	2	2	2
001	1	0	3	0	1	3	3
010	3	2	1	2	3	2	3
011	2	1	2	1	2	2	2
100	1	2	1	2	2	2	2
101	0	1	2	1	1	2	2
110	2	3	0	3	3	3	3
111	1	2	1	2	2	2	2

Alors, d'une part, nous avons $minimax(P) \cap minimax(P') = \{(101)\}$, mais d'autre part, nous avons $minimax(P \cup P') = \{(000), (011), (100), (101), (111)\}$. Ceci contredit donc la consistance irrésolue forte. □

Ainsi, minimax ne vérifie pas la consistance irrésolue, cela s'explique par la non-linéarité de l'opérateur d'agrégation maximum. Ce résultat s'étend alors à minimax conditionnelle. Cependant, la règle minimax conditionnelle vérifie la forme faible de la consistance irrésolue faible, ceci implique donc que minimax la vérifie aussi.

Proposition 4.7. *Minimax conditionnelle vérifie la consistance irrésolue faible.*

Preuve. Supposons que minimax conditionnelle ne vérifie pas la consistance irrésolue faible. Alors, il existe deux profils disjoints P et P', tels que $minimax(P) \cap minimax(P') \neq \emptyset$, et $minimax(P) \cap minimax(P') \nsubseteq minimax(P \cup P')$. Sans perte de généralité, considérons une alternative $\overrightarrow{y}$ telle que $\overrightarrow{y} \in minimax(P) \cap minimax(P')$ mais $\overrightarrow{y} \notin minimax(P \cup P')$. Puisque $\overrightarrow{y} \notin minimax(P \cup P')$, nous avons que pour tout $\overrightarrow{x} \in minimax(P \cup P')$, le score minimax de $\overrightarrow{y}$ dans $P \cup P'$ est strictement supérieur au score minimax de $\overrightarrow{x}$ dans $P \cup P'$:

$$minimax(\overrightarrow{y}, P \cup P') > minimax(\overrightarrow{x}, P \cup P')$$

Et puisque $\overrightarrow{y} \in minimax(P) \cap minimax(P')$, nous savons que pour tout $\overrightarrow{x}$, le score minimax de $\overrightarrow{y}$ dans P et dans P' est inférieur ou égal au score minimax de $\overrightarrow{x}$ dans P et dans P' c'est-à-dire :

$$minimax(\overrightarrow{y}, P) \leq minimax(\overrightarrow{x}, P),$$
$$minimax(\overrightarrow{y}, P') \leq minimax(\overrightarrow{x}, P').$$

Or, nous savons que $minimax(\overrightarrow{d}, P \cup P') = \max minimax(\overrightarrow{d}, P); minimax(\overrightarrow{d}, P')$, pour toute alternative $\overrightarrow{d} \in D$. Ainsi, les deux équations précédentes impliquent :

$$minimax(\overrightarrow{y}, P \cup P') \leq minimax(\overrightarrow{x}, P \cup P'),$$

ce qui est une contradiction. □

Étudions maintenant la participation. Notons que la définition de la participation s'appuie fortement sur l'hypothèse des préférences δ-cohérentes des votants.

Proposition 4.8. *Minisum conditionnelle vérifie la participation.*

Preuve. Supposons que minisum conditionnelle ne satisfait pas la participation, alors il existe un profil P et un votant $i \notin N$ tels que $minisum(P) \succ_i minisum(P \cup \{v_i\})$. Notons $\overrightarrow{d} = minisum(P)$ et $\overrightarrow{f} = minisum(P \cup \{v_i\})$. Alors, nous avons :

$$minisum(\overrightarrow{d}, P \cup \{v_i\}) \geq minisum(\overrightarrow{f}, P \cup \{v_i\})$$

Mais puisque $\overrightarrow{d} \succ_i \overrightarrow{f}$, nous savons qu'en passant de $P \cup \{v\}$ à P, le score de $\overrightarrow{v}$ diminue strictement moins que le score de $\overrightarrow{f}$ (car $\succ_i$ est supposée δ-cohérente). Cela implique que $minisum(\overrightarrow{d}, P) > minisum(\overrightarrow{f}, P)$, ce qui est une contradiction. □

Proposition 4.9. *Minimax conditionnelle satisfait la participation, lorsque le mécanisme de départage est un ordre linéaire.*

Preuve. Supposons que minimax conditionnelle ne vérifie pas la participation, même avec un ordre linéaire T comme mécanisme de départage. Alors, il existe un profil P et un votant $i \notin N$ tels que $minimax(P) \succ_i minimax(P \cup \{v_i\})$. Avec $\overrightarrow{d} = minimax(P)$ et $\overrightarrow{f} = minimax(P \cup \{v_i\})$, on obtient $minimax(\overrightarrow{d}, P \cup \{v_i\}) \geq minimax(\overrightarrow{f}, P \cup \{v_i\})$. Deux cas sont alors à considérer :

- Si $minimax(\overrightarrow{d}, P \cup \{v_i\}) > minimax(\overrightarrow{f}, P \cup \{v_i\})$, alors, puisque $\overrightarrow{d} \succ_i \overrightarrow{f}$, cela implique que $minisum(\overrightarrow{d}, P) > minisum(\overrightarrow{w}, P)$, ce qui est une contradiction.
- Si $minimax(\overrightarrow{d}, P \cup \{v_i\}) = minimax(\overrightarrow{f}, P \cup \{v_i\})$, alors cela implique que $\overrightarrow{f} \succ_T \overrightarrow{d}$ (car $\overrightarrow{f}$ est vainqueur dans $P \cup \{v_i\}$). Et puisque $\overrightarrow{d} \succ_i \overrightarrow{f}$, nous avons au mieux $minimax(\overrightarrow{d}, P) = minimax(\overrightarrow{f}, P)$. Mais puisque nous avons $\overrightarrow{f} \succ_T \overrightarrow{d}$, nous obtenons $minimax(P) = \overrightarrow{f}$, ce qui est une contradiction.

□

Ces deux résultats positifs s'étendent à minisum et minimax.

De plus, remarquons qu'avec l'hypothèse des préférences δ-cohérentes, une règle résolue qui vérifie la participation vérifie aussi la Kelly-participation sous sa forme irrésolue. En effet, s'il existe un contre-exemple pour la Kelly-participation pour une règle irrésolue r alors ce contre-exemple est valide pour la participation pour la forme résolue de cette règle r, en choisissant un mécanisme de départage des ex aequo approprié. Ainsi, nous obtenons :

Proposition 4.10. *Minisum et minimax conditionnelles vérifient la Kelly-participation.*

Intéressons-nous maintenant à la monotonie.

Proposition 4.11. *Minisum conditionnelle est fortement monotone, lorsque le mécanisme de départage est un ordre linéaire.*

Preuve. Considérons un profil P sur p domaines D_i pour $i = 1 \ldots p$, et une valeur de variable $a_i \in minisum(P)$ tels qu'un votant i n'approuve pas a_i étant données les valeurs des variables précédant X_i dans $minisum(P)$. Maintenant, considérons P' obtenu depuis P mais où le votant v approuve a_i étant données les valeurs des variables précédant X_i dans $minisum(P)$. Alors, de P à P', les scores minisum des alternatives sont transformés de la façon suivante :

- les scores des alternatives qui contiennent a_i (étant données les valeurs des variables précédant a_i dans $minisum(P)$) sont diminués de 1,
- les scores des autres alternatives ne diminuent pas.

Ainsi, avec un ordre linéaire comme mécanisme de départage des ex aequo, nous obtenons $minisum(P') = minisum(P)$. □

Ainsi minisum conditionnelle est fortement monotone, ce qui implique que minisum l'est aussi. Par contre, la propriété suivante énonce que minimax n'est pas fortement monotone.

Proposition 4.12. *Minimax n'est pas fortement monotone.*

Preuve. La preuve est un contre-exemple. Considérons un ensemble de trois votants $N = \{1, 2, 3\}$ et trois candidats $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Les préférences des votants sont les suivantes :

$$\begin{array}{ll} P_1: & (101) \\ P_2: & (011) \\ P_3: & (010) \end{array}$$

Nous créons le votant $1'$ à partir du votant 1 en ajoutant le candidat x_2 au vote P_1, c'est-à-dire $P_{1'} = P_1 \cup \{x_2\}$. Considérons maintenant le profil P' construit à partir de P en remplaçant le votant 1 par le votant $1'$. Le tableau suivant résume les distances de Hamming et les scores minimax des comités pour les profils P, P'.

$H(c,i)$	1	2	3	$1'$	max_P	$max_{P'}$
000	2	2	1	3	2	3
001	1	1	2	2	2	2
010	3	1	0	2	3	2
011	2	0	1	1	2	1
100	1	3	2	2	3	3
101	0	2	3	1	3	3
110	2	2	1	1	2	2
111	1	1	2	0	2	2

Nous avons alors $(110) \in minimax(P)$ mais $(110) \notin Minimax(P')$, ce qui contredit la monotonie forte. □

Minimax ne vérifie pas la monotonie forte et donc minimax conditionnelle non plus. De même que pour la consistance irrésolue, cela semble lié à la non linéarité de l'opérateur d'agrégation maximum. Cependant, minimax conditionnelle vérifie la monotonie faible.

Proposition 4.13. *Minimax conditionnelle est faiblement monotone, lorsque le mécanisme de départage est un ordre linéaire.*

Preuve. Considérons un profil P sur p domaines D_i pour $i = 1 \dots p$ et considérons une valeur $a_i \in minimax(P)$ telle qu'il existe un votant v qui n'approuve pas a_i étant données les valeurs des variables précédant a_i dans $minimax(P)$. Maintenant, considérons P' obtenu depuis P mais où le votant v approuve a_i étant données les valeurs des variables précédant a_i dans $minimax(P)$. Alors, de P à P', les scores minimax des alternatives sont transformés de la façon suivante :

- les scores des alternatives qui contiennent a_i (étant données les valeurs des variables précédant a_i dans $minimax(P)$) n'augmentent pas et peuvent diminuer de 1,
- les scores des autres alternatives ne diminuent pas et peuvent augmenter de 1.

Ainsi, avec un ordre linéaire comme mécanisme de départage des ex aequo, l'alternative $minimax(P')$ est telle que $a_i \in minimax(P')$. $\square$

Encore une fois, ce résultat positif est aussi vrai pour minimax. Finalement étudions la résistance aux clones de minisum et minimax. La définition de la résistance aux clones dépend de l'hypothèse sur le comportement des votants vis-à-vis de la valeur de la variable clonée. Sans contrainte sur le nombre d'approbation, nous faisons l'hypothèse que si un votant approuve une valeur a pour la variable X_i dans le profil initial P alors il approuve a et a' dans le profil P' où la valeur a a été clonée par la valeur a' pour la variable X_i.

Proposition 4.14. *Minisum et minimax conditionnelles sont résistantes aux clones.*

Preuve. Sans restriction sur le nombre d'approbation, chaque votant qui approuve une valeur a pour X_i dans P approuve aussi a et sa valeur clone a' dans P'. Les scores des alternatives qui incluent a' dans P' sont égaux aux scores des mêmes alternatives pour P dans lesquelles on remplace a' par a. Les scores des alternatives n'incluant pas a' restent inchangés de P à P'. Ces règles sont donc résistantes au clones. $\square$

Remarquons qu'avec une restriction sur le nombre d'approbation et si nous considérons qu'un votant qui approuve a a tendance à approuver a' au lieu de a, alors ces deux règles ne sont plus résistantes aux clones.

4.3.4 Manipulation

Dans cette partie, nous étudions la manipulation de minisum conditionnelle, en la considérant résolue par un mécanisme de départage des ex aequo ou irrésolue à l'aide d'un principe d'extension des préférences. De plus, rappelons qu'il est fait l'hypothèse que les préférences des votants sont δ-cohérentes.

Tout d'abord rappelons que nous avons montré que minimax est manipulable pour tout nombre de votants et de candidats dans le chapitre 3. Cela implique donc que minimax conditionnelle est manipulable.

Nous savons que minisum n'est pas manipulable dans le cadre des élections de comités. Ce résultat s'étend-il à minisum conditionnelle ?

Tout d'abord, considérons minisum conditionnelle résolue par un mécanisme de départage des ex aequo T, que nous noterons $minisum^T conditionnelle$.

Proposition 4.15. *Considérons un profil P sur p domaines D_i tel que $|D_i| = \alpha_i$ pour $i = 1 \dots p$, alors, pour tout $p \geq 2$ et tout $\alpha_i \geq 2, i = 1 \dots p$, $minisum^T$ conditionnelle est manipulable.*

Preuve. La preuve est fondée sur un exemple pour $p = 2$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, qui peut être étendu pour tout $p \geq 2$ et tout $\alpha_i \geq 2, i = 1 \dots p$.

Considérons un nombre pair de votants, n, et un domaine composé de deux variables binaires $D = X \times Y$, avec $X = \{x, \bar{x}\}$ et $Y = \{y, \bar{y}\}$. Le mécanisme de départage des ex aequo favorise (xy) face à $(\bar{x}\bar{y})$. De plus, considérons les dépendances suivantes entre les variables :

$$X \longrightarrow Y$$

Les approbations conditionnelles sont les suivantes :

$n/2$	$n/2 - 1$	1
x	$\bar{x}$	$\bar{x}$
$x : y$	$x : y$	$x : y, \bar{y}$
$\bar{x} : \bar{y}$	$\bar{x} : \bar{y}$	$\bar{x} : \bar{y}$

Les scores minisum des alternatives sont donc :

	x	$\bar{x}$
y	$n/2$	$3 \cdot n/2$
$\bar{y}$	$3 \cdot n/2 - 1$	$n/2$

Les alternatives (xy) et $(\bar{x}\bar{y})$ sont les deux alternatives vainqueurs et le mécanisme de départage choisit (xy).

Maintenant, le votant isolé change son vote et décide de ne pas approuver y, sachant que x est choisi. Cela nous donne les approbations conditionnelles suivantes :

$n/2$	$n/2-1$	1
x	$\bar{x}$	$\bar{x}$
$x:y$	$x:y$	$x:\bar{y}$
$\bar{x}:\bar{y}$	$\bar{x}:\bar{y}$	$\bar{x}:\bar{y}$

Les scores minisum deviennent donc :

	x	$\bar{x}$
y	$n/2+1$	$3\cdot n/2$
$\bar{y}$	$3\cdot n/2-1$	$n/2$

L'alternative vainqueur est alors $\bar{x}\bar{y}$ qui est l'alternative préférée du manipulateur (selon l'hypothèse que les préférences des votants sont δ-cohérentes).

Cet exemple peut être étendu à tout nombre de variables $p \geq 2$, en ajoutant de variables factices sur lesquelles tous les votants sont d'accord, et pour tout $\alpha_i \geq 2, i = 1 \dots p$. $\square$

De plus, si nous considérons deux manipulateurs dans cet exemple, nous obtenons une manipulation qui ne dépend d'aucun mécanisme de départage des ex aequo.

Maintenant, étudions la manipulation de minisum conditionnelle irrésolue. Les principes d'extension nécessaires à cette étude sont présentés en section 2.5.1.b. On remarque tout d'abord que, dans l'exemple précédent, avant manipulation l'ensemble des alternatives vainqueurs ex aequo est $\{(xy), (\bar{x}\bar{y})\}$, et après manipulation $\{(\bar{x}\bar{y})\}$. Cela nous donne donc une manipulation valide selon le principe d'extension de Fishburn, c'est-à-dire une P^F-manipulation, ce qui implique une P^G-manipulation.

Il reste à savoir si minisum conditionnelle est P^K-manipulable. Pour ce faire, nous considérons un domaine composé de trois variables binaires. Nous obtenons une manipulation qui ne dépend d'aucun mécanisme de départage, en d'autres termes une P^K-manipulation, qui s'étend pour tout $p \geq 3$ et tout $\alpha_i \geq 2, i = 1 \dots p$.

Proposition 4.16. *Considérons un profil P sur p domaines D_i tel que $|D_i| = \alpha_i$ pour $i = 1 \dots p$, alors pour tout $p \geq 3$ et tout $\alpha_i \geq 2, i = 1 \dots p$, minisum conditionnelle est P^K-manipulable.*

Preuve. La preuve est fondée sur un exemple pour $p = 3$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$, qui peut être étendu à tout $p \geq 3$ et tout $\alpha_i \geq 2, i = 1 \dots p$.

Considérons un nombre pair de votants, n, un domaine composé de trois variables binaires $D = \{X, Y, Z\}$, avec $X = \{x, \bar{x}\}$ et $Y = \{y, \bar{y}\}$ et $Z = \{z, \bar{z}\}$. De plus, considérons les dépendances suivantes entre les variables :

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

Les approbations conditionnelles sont les suivantes :

$n/2-1$	1	$n/2-1$	1
x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$
$x:y$	$x:y$	$x:y$	$x:y,\bar{y}$
$\bar{x}:\bar{y}$	$\bar{x}:y$	$\bar{x}:\bar{y}$	$\bar{x}:\bar{y}$
$xy:z$	$xy:z$	$xy:z$	$xy:z,\bar{z}$
$x\bar{y}:z$	$x\bar{y}:z$	$x\bar{y}:z$	$x\bar{y}:\bar{z}$
$\bar{x}y:z$	$\bar{x}y:z$	$\bar{x}y:\bar{z}$	$\bar{x}y:\bar{z}$
$\bar{x}\bar{y}:\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}:\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}:\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}:\bar{z}$

Les scores minisum des alternatives sont :

alternative	δ
(xyz)	$n/2$
$(xy\bar{z})$	$3\cdot n/2-1$
$(x\bar{y}z)$	$3\cdot n/2$
$(x\bar{y}\bar{z})$	$5\cdot n/2-2$
$(\bar{x}yz)$	$2\cdot n$
$(\bar{x}y\bar{z})$	$2\cdot n-1$
$(\bar{x}\bar{y}z)$	$3\cdot n/2+1$
$(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$	$n/2+1$

L'alternative (xyz) est l'alternative vainqueur.

Maintenant, le dernier votant change son vote et décide de ne pas approuver y sachant que x est choisi, et de ne pas approuver z sachant que xy est choisi. Cela nous donne les approbations conditionnelles suivantes :

$n/2-1$	1	$n/2-1$	1
x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$
$x:y$	$x:y$	$x:y$	$x:\bar{y}$
$\bar{x}:\bar{y}$	$\bar{x}:y$	$\bar{x}:\bar{y}$	$\bar{x}:\bar{y}$
$xy:z$	$xy:z$	$xy:z$	$xy:\bar{z}$
$x\bar{y}:z$	$x\bar{y}:z$	$x\bar{y}:z$	$x\bar{y}:\bar{z}$
$\bar{x}y:z$	$\bar{x}y:z$	$\bar{x}y:\bar{z}$	$\bar{x}y:\bar{z}$
$\bar{x}\bar{y}:\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}:\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}:\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}:\bar{z}$

Les scores minisum des alternatives deviennent :

alternative	δ
(xyz)	$n/2+2$
$(xy\bar{z})$	$3\cdot n/2$
$(x\bar{y}z)$	$3\cdot n/2$
$(x\bar{y}\bar{z})$	$5\cdot n/2-2$
$(\bar{x}yz)$	$2\cdot n$
$(\bar{x}y\bar{z})$	$2\cdot n-1$
$(\bar{x}\bar{y}z)$	$3\cdot n/2+1$
$(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$	$n/2+1$

L'alternative vainqueur est alors $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ qui est l'alternative préférée du manipulateur (selon l'hypothèse que les préférences des votants sont δ-cohérentes), et la manipulation est réussie.

Cet exemple peut être étendu à tout nombre de variables $p \geq 3$, en ajoutant des variables factices sur lesquelles les votants sont d'accord, et tout $\alpha_i \geq 2, i = 1 \ldots p$. □

La règle minisum conditionnelle est donc manipulable, qu'elle soit résolue ou irrésolue, tandis que minisum n'est pas manipulable dans le élections à vainqueurs multiples. Cela n'est pas étonnant car la présence de dépendances entre les variables implique nécessairement des possibilités de manipulation.

4.3.5 Résumé

Cette section porte sur l'étude des deux règles de vote par approbation conditionnelle, minisum et minimax conditionnelles.

Tout d'abord, on s'intéresse à la complexité de calcul de ces deux règles, en rappelant que minimax est NP-difficile et donc minimax conditionnelle l'est aussi. Nous montrons de plus que la détermination d'un vainqueur pour la règle minisum conditionnelle est NP-difficile alors qu'elle est polynomiale pour minisum. Cependant, nous obtenons un ratio d'approximation différentielle pour ce problème.

Puis, nous étudions la proximité des alternatives retournées par ces deux règles. Pour tout nombre de variables et pour toute taille de ces varaibles, nous obtenons des profils pour lesquels les alternatives vainqueurs pour minisum et minimax conditionnelles sont totalement opposées. De plus, nous prouvons que le ratio maximal entre le score minisum de ces deux alternatives est égal n.

Ensuite, nous étudions les propriétés axiomatiques vérifiées ou non par ces règles. Nous montrons par exemple que minisum conditionnelle est fortement monotone, tandis que minimax conditionnelle est seulement faiblement monotone.

Enfin, nous étudions la manipulabilité de ces deux règles, et en particulier celle de minisum conditionnelle. En effet, étant donné que minisum n'est pas manipulable, l'étude de la manipulabilité de minisum conditionnelle est importante. La conclusion est que minisum conditionnelle est manipulable, qu'elle soit considérée comme règle résolue ou irrésolue. Ainsi, lorsque l'on permet aux votants d'exprimer des préférences conditionnelles, cela crée des situations de manipulation.

4.4 Vote par approbation conditionnelle séquentiel

Dans cette section, nous étudions le vote par approbation séquentiel (SCAV) dans le contexte d'approbations conditionnelles, présenté en section 4.2.3. Nous commençons l'étude de cette règle en mesurant la proximité de ses résultats avec ceux de minisum conditionnelle. Nous calculons le rapport entre les scores de minisum des issues vainqueurs pour le vote par approbation séquentiel et pour minisum. Ensuite nous étudions la manipulation du vote par approbation séquentiel.

4.4.1 Proximité des solutions du vote par approbation séquentiel et de minisum conditionnelle

Dans cette section, nous étudions le lien entre les alternatives vainqueurs pour SCAV et minisum. Pour ce faire, nous calculerons le score minisum maximal d'une alternative vainqueur pour le SCAV. Commençons par un exemple avec un domaine composé de deux variables binaires.

Exemple 4.8. *Considérons un domaine composé de deux variables binaires $D = X \times Y$ et $X = \{x, \bar{x}\}$, $Y = \{y, \bar{y}\}$. De plus, considérons les dépendances suivantes entre les variables :*

$$X \longrightarrow Y$$

Le profil est composé de $n+1$ votants avec les approbations conditionnelles suivantes :

$n/2+1$	$n/2$
x	$\bar{x}$
$x : y$	$x : \bar{y}$
$\bar{x} : \bar{y}$	$\bar{x} : \bar{y}$

Ces préférences conduisent aux désaccords suivants :

	(xy)	$(x\bar{y})$	$(\bar{x}y)$	$(\bar{x}\bar{y})$
$n/2+1$	0	1	2	1
$n/2$	2	1	1	0

Les scores minisum des alternatives sont donc :

	x	$\bar{x}$
y	n	$3n/2+2$
$\bar{y}$	$n+1$	$n/2+1$

Le comité vainqueur pour minisum est $(\bar{x}\bar{y})$ *avec un score minisum de* $n/2+1$. *Tandis que le comité vainqueur pour SCAV est* (xy), *et possède un score minisum de* n.

Le rapport entre les scores de minisum pour le vainqueur de minisum et le vainqueur de SCAV est donc $\frac{2}{1+2/n}$, *c'est-à-dire* $2 - o(n)$.

En fait, ce ratio est le ratio le plus grand que l'on peut obtenir entre une alternative vainqueur pour SCAV et une alternative vainqueur pour minisum, lorsque l'on considère deux variables binaires.

Proposition 4.17. *Étant donné un domaine combinatoire composé de deux variables binaires, le ratio maximal entre les scores de minisum de l'alternative vainqueur de SCAV et de celle vainqueur de minisum est* 2.

Preuve. Considérons n votants, un domaine composé de deux variables binaires $X \times Y$ et les dépendances suivantes entre les variables :

$$X \longrightarrow Y$$

Nous chercherons d'abord une borne supérieure pour le score minisum du vainqueur de SCAV, puis une borne inférieure pour le score du vainqueur de minisum sous la contrainte qu'il ne soit pas vainqueur pour SCAV.

Tout d'abord, supposons que (xy) est l'alternative vainqueur pour SCAV, cherchons alors une borne supérieure pour son score minisum. Pour que (xy) soit le vainqueur de SCAV, il est nécessaire que x et $(x : y)$ soient approuvés par une majorité de votants. Cela entraîne un score minisum maximal de n.

Maintenant, supposons que $(\bar{x}\bar{y})$ est le vainqueur de minisum et n'est pas vainqueur pour SCAV. Une des possibilités pour que $(\bar{x}\bar{y})$ ne soit pas vainqueur pour SCAV est que $\bar{x}$ soit approuvé par moins de la majorité des votants, et dans ce cas $(\bar{x} : \bar{y})$ peut être approuvé par n'importe quel nombre de votants. Il existe d'autres possibilités pour que $(\bar{x} : \bar{y})$ ne soit pas vainqueur pour SCAV mais elles conduisent à un score minsum supérieur ou égal à celui de la possibilité choisie. Ainsi, le plus petit score minisum pour $(\bar{x}\bar{y})$ tout en n'étant pas vainqueur de SCAV est $n/2$.

Ces deux bornes nous donnent alors un ratio théorique de 2, qui est la ratio atteint dans l'exemple précédent lorsque n tend vers l'infini. □

Ainsi, au pire de cas, l'alternative vainqueur pour SCAV possède un score minisum deux fois plus grand que l'alternative vainqueur pour minisum, lorsque l'on considère deux variables binaires.

Nous pouvons étendre ce résultat à un nombre arbitraire de domaines binaires.

Proposition 4.18. *Étant donné un domaine combinatoire composé de* p *variables binaires, le ratio maximal entre les scores minisum de l'alternative vainqueur pour SCAV et de celle vainqueur pour minisum est* p.

Preuve. Considérons n votants, un domaine avec p variables binaires $X_i = \{x_1^i, x_2^i\}$, avec $i = 1 \dots p$ et les dépendances suivantes entre les variables :

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_p$$

Nous chercherons d'abord une borne supérieure pour le score minisum du vainqueur de SCAV, puis une borne inférieure pour le score du vainqueur de minisum sous la contrainte qu'il ne soit pas vainqueur pour SCAV.

Dans un premier temps, supposons que $(x_1^1 x_1^2 \dots x_1^p)$ est une alternative vainqueur pour SCAV, nous cherchons une borne supérieure pour son score minisum. Pour que $(x_1^1 x_1^2 \dots x_1^p)$ soit vainqueur pour SCAV, il est nécessaire que x_1^1, $x_1^1 : x_1^2, \dots, x_1^1 x_1^2 \dots : x_1^p$ soient approuvés par une majorité de votants. Ce qui entraîne un score minisum maximal de $p \cdot n/2$.

Maintenant, supposons que $(x_2^1 x_2^2 \dots x_2^p)$ est vainqueur pour minisum sans être vainqueur pour SCAV. Un des moyens pour que $(x_2^1 x_2^2 \dots x_2^p)$ ne soit pas vainqueur pour SCAV est de l'éliminer au premier tour. Ainsi x_2^1 doit être approuvé par moins de la majorité, et dans ce cas, $x_2^1 : x_2^2, \dots, x_2^1 x_2^2 \dots : x_2^p$ peuvent être approuvés par un nombre quelconque de votants. De même, il existe d'autres moyens pour éviter que $(x_2^1 x_2^2 \dots x_2^p)$ ne soit vainqueur pour SCAV, mais ils conduisent à un score minisum supérieur ou égal. Ainsi le plus petit score minisum pour $(x_2^1 x_2^2 \dots x_2^p)$ tout en n'étant pas vainqueur de SCAV est $n/2$.

Ces deux bornes nous conduisent à un ratio théorique de p. □

Ce ratio théorique de p est atteint par l'exemple 4.9.

Exemple 4.9. *Considérons n votants, un domaine combinatoire composé de p variables binaires $X_i = \{x_1^i, x_2^i\}$, avec $i = 1 \dots p$ et les dépendances suivantes entre les variables :*

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_p$$

Les préférences conditionnelles des votants sont les suivantes : $n/2$ votants approuvent toujours la première valeur de chaque variable sauf lorsque toutes les variables précédentes sont fixées à leurs secondes valeurs, les autres $n/2$ votants approuvent toujours la seconde valeur des variables binaires.

$n/2$	$n/2$
x_1^1	x_2^1
$x_1^1 : x_1^2$	$x_1^1 : x_2^2$
$x_2^1 : x_2^2$	$x_2^1 : x_2^2$
$x_1^1 x_1^2 : x_1^3$	$x_1^1 x_1^2 : x_2^3$
$x_1^1 x_2^2 : x_1^3$	$x_1^1 x_2^2 : x_2^3$
$x_2^1 x_1^2 : x_1^3$	$x_2^1 x_1^2 : x_2^3$
$x_2^1 x_2^2 : x_2^3$	$x_2^1 x_2^2 : x_2^3$
$\vdots$	$\vdots$

L'alternative vainqueur pour SCAV est $(x_1^1 x_1^2 \dots x_1^p)$, avec un mécanisme de départage lexicographique, et son score minisum est $p \cdot n/2$. Tandis que l'alternative vainqueur pour minisum est $(x_2^1 x_2^2 \dots x_2^p)$ avec un score de $n/2$. Ainsi le ratio obtenu est p.

Maintenant, étudions comment ce résultat s'étend à des domaines de tailles arbitraires.

Théorème 9. *Étant donné un domaine combinatoire composé de p domaines D_i, avec $|D_i| = \alpha_i$, $i = 1 \dots p$, le ratio maximal entre les scores minisum de l'alternative vainqueur de SCAV et de celle vainqueur de minisum est $(\sum_{i=1}^p 1 - \frac{1}{\alpha_i})/(1 + \frac{1}{\alpha_1})$.*

Preuve. Considérons n votants, un domaine composé de p domaines D_i, avec $|D_i| = \alpha_i$, $i = 1 \dots p$ et les dépendances suivantes entre les variables :

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_p$$

Nous chercherons d'abord une borne supérieure pour le score minisum du vainqueur de SCAV, puis une borne inférieure pour le score du vainqueur de minisum sous la contrainte qu'il ne soit pas vainqueur pour SCAV.

Premièrement, supposons que $(x_1^1 x_1^2 \dots x_1^p)$ est l'alternative vainqueur pour SCAV, nous cherchons alors une borne supérieure pour son score minisum. Pour que $(x_1^1 x_1^2 \dots x_1^p)$ soit un vainqueur pour SCAV, x_1^1, respectivement $x_1^1 : x_1^2, \dots, x_1^1 x_1^2 \dots : x_1^p$, doit être approuvé par au moins n/α_1 votants, respectivement $n/\alpha_2, \dots, n/\alpha_p$ votants. Cela entraîne un score minisum maximal de $\sum_{i=1}^p n - n \cdot \frac{1}{\alpha_i}$, c'est-à-dire $n \cdot \sum_{i=1}^p 1 - \frac{1}{\alpha_i}$.

Maintenant, supposons que $(x_2^1 x_2^2 \dots x_2^p)$ est une alternative vainqueur pour minisum sans être vainqueur pour SCAV. Un des moyens pour que $(x_2^1 x_2^2 \dots x_2^p)$ ne soit pas vainqueur pour SCAV est de l'éliminer au premier tour. Ainsi x_2^1 doit être approuvé par moins de $\frac{n}{\alpha_1}$ votants, et dans ce cas, $x_2^1 : x_2^2, \dots x_2^1 x_2^2 \dots : x_2^p$ peuvent être approuvés par un nombre quelconque de votants. De même, il existe d'autres moyens pour éviter que $(x_2^1 x_2^2 \dots x_2^p)$ ne soit vainqueur pour SCAV, mais ils conduisent à un score minisum supérieur ou égal. Ainsi le plus petit score minisum pour $(x_2^1 x_2^2 \dots x_2^p)$ tout en n'étant pas vainqueur de SCAV est $n - \frac{n}{\alpha_1}$.

Nous obtenons alors le ratio théorique $(\sum_{i=1}^p 1 - \frac{1}{\alpha_i})/(1 - \frac{1}{\alpha_1})$. □

De même, ce ratio théorique est atteint par l'exemple 4.10.

Exemple 4.10. *Considérons un domaine composé de p domaines D_i, avec $|D_i| = \alpha_i$ pour $i = 1 \dots p$. On fixe le nombre de votants à n, où n est un entier multiple de chaque α_i, pour $i = 1 \dots p$. De plus, considérons les dépendances suivantes entre les variables :*

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_p$$

Il est seulement nécessaire de définir partiellement les préférences des votants, variable par variable :

- *n/α_1 votants approuvent x_1^1, n/α_1 votants approuvent x_2^1, ..., et n/α_1 votants approuvent $x_{\alpha_1}^1$.*
- *n/α_2 votants approuvent $x_1^1 : x_1^2$, n/α_2 votants approuvent $x_1^1 : x_2^2$, ..., et n/α_2 votants approuvent $x_1^1 : x_{\alpha_2}^2$.*
- *ainsi de suite,*
- *n/α_p votants approuvent $x_1^1 x_1^2 \ldots : x_1^p$, n/α_p votants approuvent $x_1^1 x_1^2 \ldots : x_2^p$, ..., et n/α_p votants approuvent $x_1^1 x_1^2 \ldots : x_{\alpha_p}^p$.*
- *de plus, chaque votant approuve aussi $x_2^1 : x_2^2$, $x_2^1 x_2^2 : x_2^3$, ..., $x_2^1 x_2^2 \ldots : x_2^p$.*

Alors, avec un mécanisme de départage des ex aequo lexicographique, l'alternative vainqueur pour SCAV est $(x_1^1 x_1^2 \ldots x_1^p)$ et son score minisum est $n \cdot \sum_{i=1}^{p} 1 - \frac{1}{\alpha_i}$. L'alternative vainqueur pour minisum est $(x_2^1 x_2^2 \ldots x_2^p)$ avec un score de $n - \frac{n}{\alpha_1}$.

Le ratio obtenu est donc de $(\sum_{i=1}^{p} 1 - \frac{1}{\alpha_i})/(1 - \frac{1}{\alpha_1})$.

Ainsi, si nous considérons des domaines de variables binaires, le ratio devient p. Plus généralement, en considérant des domaines de même taille α, alors le ratio maximal est aussi égal à p.

En résumé, nous avons montré que, d'une part, il existe des profils pour lesquels SCAV et minisum conditionnelle débouchent sur des issues totalement opposées, et que, d'autre part, le ratio maximal entre les scores minisum d'une alternative vainqueur pour SCAV et d'une alternative vainqueur pour minisum est égal à $(\sum_{i=1}^{p} 1 - \frac{1}{\alpha_i})/(1 - \frac{1}{\alpha_1})$.

4.4.2 Manipulation

Dans cette partie nous étudions la manipulation de SCAV avec des approbations conditionnelles, en la supposant résolue par un mécanisme de départage des ex aequo. Nous montrons que SCAV est manipulable pour tout $p \geq 2$ et tout $\alpha_i \geq 2, i = 1 \ldots p$.

Proposition 4.19. *Considérons un profil P sur p domaines D_i tel que $|D_i| = \alpha_i$ pour $i = 1 \ldots p$, alors pour tout $p \geq 2$ et tout $\alpha_i \geq 2, i = 1 \ldots p$, $SCAV^T$ est manipulable.*

Preuve. La preuve est fondée sur un exemple pour $p = 2$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, qui peut être étendu à tout $p \geq 2$ et tout $\alpha_i \geq 2, i = 1 \ldots p$.

Considérons un domaine avec deux variables binaires $D = X \times Y$, avec $X = \{x, \bar{x}\}$ et $Y = \{y, \bar{y}\}$ et les dépendances suivantes entre les variables :

$$X \longrightarrow Y$$

Le mécanisme de départage des ex aequo favorise les valeurs positives de chaque variable. Les préférences conditionnelles sont les suivantes :

$n/2$	$n/2$	1
x	$\bar{x}$	$x, \bar{x}$
$x : y$	$x : y$	$x : \bar{y}$
$\bar{x} : \bar{y}$	$\bar{x} : \bar{y}$	$\bar{x} : \bar{y}$

Alors, l'alternative vainqueur pour $SCAV^T$ est (xy).

Maintenant, le votant isolé change son vote et décide de ne pas approuver x. Cela nous donne les préférences suivantes :

$n/2$	$n/2$	1
x	$\bar{x}$	$\bar{x}$
$x : y$	$x : y$	$x : \bar{y}$
$\bar{x} : \bar{y}$	$\bar{x} : \bar{y}$	$\bar{x} : \bar{y}$

Maintenant, l'alternative vainqueur est $(\bar{x}\bar{y})$ et la manipulation est réussie puisque le manipulateur préfère $(\bar{x}\bar{y})$ à (xy).

Cet exemple peut être étendu à tout nombre de variables $p \geq 2$, en ajoutant des variables artificielles sur lesquelles les votants sont tous d'accords, et à tout nombre de valeurs pour chacune de ces variables $\alpha_i \geq 2, i = 1 \ldots p$. $\square$

4.4.3 Résumé

Cette section porte sur l'étude du vote séquentiel par approbation, dans le contexte d'approbations conditionnelles.

Tout d'abord, nous étudions la proximité des alternatives retournées par SCAV et par minisum conditionnelle. Pour tout nombre de variables et pour toute taille de ces variables, nous obtenons des profils pour lesquels les alternatives vainqueurs pour minisum et SCAV sont totalement opposées. De plus, nous prouvons que le ratio maximal entre le score minisum de ces deux alternatives est égal $(\sum_{i=1}^{p} 1 - \frac{1}{\alpha_i})/(1 - \frac{1}{\alpha_1})$.

Ensuite, nous étudions la manipulabilité de cette règle, pour laquelle nous donnons un exemple de manipulation valide, pour tout nombre de variables et pour toute taille de ces variables.

Chapitre 5
Vainqueurs possibles et nécessaires en vote par approbation

Résumé Connaissant seulement les préférences ordinales d'un ensemble de votants sur un ensemble de candidats, et en faisant l'hypothèse que les votants soumettent des votes sincères, que peut-on dire sur les vainqueurs possibles d'une élection par approbation ? Le résultat dépend de la manière dont chaque votant choisit la frontière entre les candidats acceptables et non-acceptables, c'est-à-dire, le nombre de candidats qui vont être approuvés. Tandis qu'il est facile de savoir quel candidat peut être un vainqueur unique, nous montrons qu'il est difficile de décider si un ensemble d'au moins deux candidats peut constituer l'ensemble des candidats co-vainqueurs. Nous étudions aussi ce problème dans le cas où le nombre de candidats approuvés par chaque votant est limité par une borne supérieure et/ou inférieure. De plus, si nous avons une distribution de probabilité sur le nombre de candidats approuvés par chaque votant, nous obtenons une distribution de probabilité sur les vainqueurs : nous étudions la forme de cette distribution de façon expérimentale, en suivant l'hypothèse de culture impartiale et le modèle de Mallows. Enfin, nous généralisons certains de ces résultats au vote par approbation à vainqueurs multiples, pour une grande partie des règles proposées dans la littérature et présentées en section 2.3.4.

Sommaire

5.1 Introduction

5.1.1 Motivation et plan

La plupart des règles de vote prennent en entrée une *collection d'ordres* sur les candidats. Lorsque ces informations préférentielles sont incomplètes, par exemple dans un contexte où la communication est limitée, se posent alors les problèmes de vainqueurs possibles et nécessaires. Ces problèmes ont été présentés en section 2.6.

Cependant, le vote par approbation, proposé par Brams et Fishburn (1978), fait exception en prenant en entrée un *sous-ensemble* de candidats. Étant donné les préférences ordinales d'un votant sur un ensemble de candidats, il est connu qu'il existe plusieurs votes d'approbation sincères et compatibles avec cet ordre. En effet, pour chaque candidat x, approuver l'ensemble des candidats qui sont au moins autant appréciés que x constitue un vote sincère, comme on l'a vu en section 2.5.1.a. Si la relation de préférence du votant sur un ensemble de m candidats est un ordre, alors il existe m votes par approbation sincère [1], d'après Brams et Fishburn (1983).

Maintenant, supposons que nous [2] possédions les ordres de préférences de chaque votant mais que nous ne puissions pas prédire le seuil qu'ils fixeront, c'est-à-dire le nombre de candidats qu'ils approuveront. Pour chaque vecteur de seuils (un seuil pour chaque votant), il existe un vainqueur, ou, dans le cas d'une égalité, un ensemble de candidats co-vainqueurs, appelé l'ensemble co-vainqueur. Un ensemble de candidats est un ensemble co-vainqueur possible si il constitue l'ensemble des co-vainqueurs pour un vecteur de seuils admissible. De même, un candidat x est un vainqueur unique possible si $\{x\}$ est un ensemble co-vainqueur possible.

Les propriétés de l'ensemble des vainqueurs possibles ont été étudiées en premier par Brams et Sanver (2006), sous la restriction que les votants ne sont pas autorisés à approuver tous les candidats (ou aucun). Ils ont montré que l'ensemble des vainqueurs possibles contient le vainqueur de Condorcet (lorsqu'il existe) et les vainqueurs de nombreuses autres règles. Ils n'ont pas caractérisé cet ensemble, ni abordé les problèmes computationnels posés par l'identification de ces ensembles.

Dans ce chapitre, nous allons plus loin sur plusieurs aspects. En premier, nous considérons une situation plus générale où le nombre de candidats à approuver est borné par une borne supérieure et une borne inférieure fixées. Le cas où les votants sont totalement libres de choisir le nombre de candidats qu'ils approuvent correspond à la situation où les bornes sont respectivement 1 et m candidats [3]. Dans ce cas, caractériser l'ensemble des candidats qui sont vainqueurs uniques (sans ex aequo) se trouve être immédiat : x est un

1. Parfois, voter pour l'ensemble des candidats n'est pas autorisé, il existe alors $m-1$ votes sincères.
2. 'nous' est une notion générale et représente toute entité capable de raisonner sur ce vote, l'organisateur du vote par exemple.
3. Dans le cas d'une élection à vainqueur unique, approuver tous les candidats et n'en approuver aucun sont équivalents, dans le sens où l'ensemble des (co-)vainqueurs sera identique ; ainsi nous excluons la possibilité de n'approuver personne, sans perdre de généralité.

vainqueur unique possible si il n'est pas dominé au sens de Pareto dans le profil initial. Nous obtenons une caractérisation similaire lorsque les bornes sont différentes. Nous abordons alors le problème d'identifier les ensembles de co-vainqueurs possibles, et montrons qu'il est NP-complet, même pour des ensembles de taille deux. Puis nous considérons une version probabiliste du problème, en supposant une distribution de probabilité sur les vecteurs de seuils. Nous effectuons une étude expérimentale sur la forme de la distribution de probabilité sur les vainqueurs, à l'aide de l'hypothèse de la culture impartiale et du modèle de Mallows. Enfin, nous étudions le problème du vainqueur possible dans le cadre du vote par approbation à vainqueurs multiples, pour la plupart des règles proposées en section 2.3.4.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 5.2 nous définissons les termes d'ensemble de (co-)vainqueurs possibles et nécessaires. En section 5.3, nous donnons des caractérisations et des résultats de complexité du calcul des ensembles vainqueurs possibles en vote par approbation à vainqueur unique. Puis, nous étudions expérimentalement deux aspects du vote par approbation avec préférences incomplètes, à savoir la sensibilité de cette règle au choix des seuils d'approbation et la probabilité d'élire le vainqueur de Borda. Ensuite, dans la section 5.4, nous considérons le vote par approbation à vainqueurs multiples. Enfin, nous étudions le problème de comités vainqueurs possibles pour une partie de règles définies en section 2.3.4.

5.1.2 Travaux en lien

Ce chapitre est lié à au moins trois directions de recherche. La première est une série de travaux en théorie du choix social qui explore le lien entre le vote par approbation et le modèle classique d'Arrow, qui considère des fonctions de choix social qui associent une collection d'ordres faibles à un sous-ensemble non-vide de candidats (tandis que le vote par approbation agrège une collection de sous-ensembles de candidats). La notion essentielle ici est celle de vote sincère. La plupart de ces travaux (à l'exception de Brams et Sanver (2006)) étudient les conditions nécessaires pour que le vote par approbation soit résistant ou non à la manipulation, et dans quelle mesure le comportement stratégique peut conduire à un résultat indésirable. On peut citer comme exemple les travaux de Sertel et Yılmaz (1999), Sinopoli et al. (2006), Laslier (2009), Endriss et al. (2009), Nuñez (2010), Laslier et Sanver, et Endriss (2013b). Des questions de l'ordre de la théorie de jeux sont aussi étudiées dans ce contexte par Laslier et Sanver.

La seconde direction de recherche est l'étude de la caractérisation et du calcul des vainqueurs possibles et nécessaires, étant données des informations incomplètes sur les votes. La différence principale avec notre étude est que dans chacun de ces travaux (à une exception près, mentionnée ci-dessous) la règle de vote utilise un profil de préférence classique, c'est-à-dire, une collection d'ordres. L'information incomplète consiste alors en une collection d'*ordres partiels*. Un candidat vainqueur possible (respectivement nécessaire) est un candidat qui gagne pour une complétion (respectivement toutes les complétions) possibles de cette collection d'ordres partiels. Les travaux représentatifs de cette direction de recherche sont Konczak et Lang (2005), Xia et Conitzer (2008), Betzler et Dorn (2009), Baumeister et Rothe (2010), Chevaleyre et al. (2010), Xia et al. (2011), Chevaleyre et al. (2012), Betzler et al. (2009), Bachrach et al. (2010), Lang et al. (2011) et Kalech et al. (2011) et enfin le chapitre du handbook du choix social computationnel, Boutilier et Rosenschein (2016). Une exception est Xia et al. (2011), qui énonce une caractérisation des vainqueurs possibles en vote par approbation étant donné un profil d'approbations initial et de nouveaux candidats pour lesquels on ne connaît pas les préférences des votants. Dans ce contexte, ils étudient trois manières d'étendre les votes par approbation initiaux aux nouveaux candidats et montrent que selon la manière choisie, déterminer si un candidat est un vainqueur possible peut être facile ou bien difficile à résoudre. Cependant, la nature de l'information incomplète n'est pas comparable à celle de notre situation (d'un côté un profil d'approbations sur un sous-ensemble de candidats, de l'autre un profil d'ordres sur l'ensemble des candidats), ce qui rend les résultats difficilement comparables.

La dernière direction de recherche est une série de travaux qui se concentre sur l'aspect computationnel du comportement stratégique (en particulier le contrôle de l'élection par l'organisateur) dans le vote par approbation, voir Erdélyi et al. (2008), et Baumeister et al. (2010) pour une étude. La raison pour laquelle cela est connexe à notre étude provient du fait que nous étudions aussi des problèmes computationnels difficiles en vote par approbation, mais, encore une fois, nos problèmes ne proviennent pas des comportements stratégiques. Enfin, l'aspect computationnel du comportement stratégique dans le vote par approbation à vainqueurs multiples a été étudié par Meir et al. (2008a).

5.2 Notions préliminaires

Les notions élémentaires sur les profils d'ordres et d'approbations ont été introduites en section 2.1.

Nous considérons n votants $N = \{1, \dots, n\}$ et m candidats $X = \{x_1, \dots, x_m\}$. Un profil d'ordres $P = (P_i)_{i \in N}$ est une collection d'ordres linéaires sur l'ensemble X. P_i est aussi noté $\succ_i$.

Un vote d'approbation est un sous-ensemble non-vide de X. Dans ce chapitre, nous manipulerons à la fois de profils d'ordres et des profils d'approbation. Pour lever toute ambiguïté, un profil d'approbations sera noté $A = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ où $A_i \subseteq X$ est le vote d'approbation du votant i, c'est-à-dire, l'ensemble des candidats approuvés par le votant i.

Le vote d'approbation du votant i est considéré comme *sincère* si pour tout candidat y approuvé par i il n'existe pas de candidat x n'étant pas approuvé par i et tel que $x \succ_i y$. Nous notons k_i, pour $i = 1, \dots, n$ et $1 \leq k_i \leq m$, le nombre de candidats approuvés par le votant i, ce que l'on appelle aussi *seuil d'approbation*. Il en résulte que dans un vote par approbation sincère chaque votant approuve ses k_i meilleurs candidats selon le rangement

P_i [4].

Illustrons ces notions à l'aide de l'exemple suivant.

Exemple 5.1. *Considérons une élection E composée de 3 votants $\{1, 2, 3\}$, de 4 candidats $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et du profil d'ordres P suivant :*

$$\begin{array}{ll} P_1: & x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4 \\ P_2: & x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1 \\ P_3: & x_4 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_3 \\ P_4: & x_3 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_1 \end{array}$$

Avec les seuils d'approbations : $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 4$, $k_4 = 1$, nous obtenons le profil d'approbations suivant :

$$\begin{array}{ll} A_1: & (0110) \\ A_2: & (0100) \\ A_3: & (1111) \\ A_4: & (0010) \end{array}$$

Étant donné un profil d'approbations A, le *score d'approbation* d'un candidat x_j, noté $app_A(x_j)$ (ou $app(x_j)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté) correspond au nombre de votants qui approuvent x_j, c'est-à-dire, les votants i tels que $x_j \in A_i$. L'*ensemble des co-vainqueurs* par approbation pour A, noté $App(A)$, est l'ensemble des candidats avec un score d'approbation maximal. Si $App(A)$ est un singleton $\{x\}$ alors x est appelé *vainqueur unique* pour A. Dans ce chapitre, on considère donc le vote par approbation en tant que règle de vote irrésolue. Une version *résolue* peut-être obtenue en utilisant un mécanisme de départage des ex aequo.

Exemple (Suite de l'exemple 5.1). *Avec le profil d'approbations précédent, les scores d'approbations de x_1, x_2, x_3 et x_4 sont respectivement 1, 3, 3 et 1. L'ensemble des candidats co-vainqueurs par approbation est donc $\{x_2, x_3\}$.*
En considérant des seuils d'approbation différents : $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 3$, $k_4 = 1$, les scores sont alors 1, 3, 2 et 1. Le candidat x_2 est donc un vainqueur unique.

Pour un profil d'ordres P, un votant $i \in N$ et un candidat $x \in X$, $rk_P(i, x)$ désigne le rang du candidat x dans le rangement P_i, $rk_P(i, x) \in \{1, \dots, m\}$. Pour $X' \subset X$, soit $P_{X'}$ la restriction de P aux candidats de X'. Nous notons $pl(x, X')$ le score de pluralité du candidat $x \in X'$ dans le profil $P_{X'}$, c'est-à-dire le nombre de votants qui rangent x en première place. Pour $X' \subset X$ et $x \in X \setminus X'$, nous écrivons $X' \succ_i x$, si pour tout $x' \in X'$, on a $x' \succ_i x$. Enfin, un candidat x *domine* un candidat x' dans le profil P si pour tout $i \in N$, $x \succ_i x'$.

Parfois, une contrainte supplémentaire sur le nombre de candidats à approuver est ajoutée. Chaque votant n'est autorisé à approuver qu'un nombre de candidats compris entre d

4. Rappelons que dans le vote par approbation à vainqueur unique, on peut négliger les votants qui n'approuvent aucun candidat sans perte de généralité, ainsi $k_i \geq 1$, pour $i = 1, \dots, n$.

et k, où $k \geq d \geq 1$. Un choix classique, souvent appliqué dans les élections réelles (en particulier dans les élections de comités), consiste à fixer d à 1 et k à une constante arbitraire, comme le nombre de places disponibles dans le comité. La méthode de vote correspondante est appelée *vote par* $[d,k]$*-approbation*. Il est à noter que le vote par approbation sans contrainte est équivalent au vote par $[1,m]$-approbation.

Comme on l'a vu précédemment, étant donné un ordre de préférences, il existe m votes d'approbation sincères et compatibles. Cela implique qu'étant donné un profil d'ordres, il existe une multitude de profils d'approbation compatibles avec cet ordre. Un vecteur de seuils (pour N et X) est un vecteur $\vec{k} = \langle k_1, \ldots, k_n \rangle \in \{1, \ldots, m\}^n$. Pour tout profil d'ordres P sur X et tout vecteur de seuils $\vec{k}$, nous définissons $(P_i)^{1\to k_i}$ comme le sous-ensemble des k_i candidats préférés du votant i, c'est-à-dire :

$$(P_i)^{1\to k_i} = \{x \in X \mid \mathrm{rk}(x, P_i) \leq k_i\}.$$

Le profil d'approbations induit par P et $\vec{k}$, noté $A^{P,\vec{k}}$, est défini par

$$A^{P,\vec{k}} = \langle (P_1)^{1\to k_1}, \ldots, (P_n)^{1\to k_n} \rangle$$

L'ensemble de tous les profils d'approbation compatibles avec P est défini par

$$AP(P) = \{A^{P,\vec{k}} \mid \vec{k} \in \{1, \ldots, m\}^n\}$$

L'exemple 5.2 permet d'illustrer ces notions.

Exemple 5.2. *Considérons une élection avec 3 votants, 3 candidats et le profil d'ordres suivant* $P = \langle x_1 \succ x_2 \succ x_3, x_1 \succ x_2 \succ x_3, x_3 \succ x_1 \succ x_2 \rangle$.
Avec le vecteur de seuils défini par $\vec{k} = \langle 2, 1, 2 \rangle$*, on obtient le profil d'approbations compatible suivant* $A^{P,\vec{k}} = \langle \{x_1, x_2\}, \{x_1\}, \{x_1, x_3\} \rangle$.
Avec le vecteur de seuils défini par $\vec{k} = \langle 1, 1, 1 \rangle$*, on obtient le profil d'approbations compatible suivant* $A^{P,\vec{k}} = \langle \{x_1\}, \{x_1\}, \{x_3\} \rangle$.

Un *ensemble co-vainqueur possible* est un sous-ensemble $X' \subseteq X$ pour lequel il existe un vecteur de seuils $\vec{k}$ tel que $X' = App(A^{P,\vec{k}})$. L'ensemble constitué par tous les ensembles co-vainqueurs possibles pour P est noté $PCS(P)$. Un candidat $x \in X$ est un vainqueur unique possible pour P si $\{x\} \in PCS(P)$. De plus, x est dit *un vainqueur possible* si il appartient à au moins un ensemble de co-vainqueur possible, *un vainqueur nécessaire* si il appartient à tout ensemble co-vainqueur possible, et enfin un *vainqueur unique nécessaire* si $PCS(P) = \{x\}$.

Dans l'exemple 5.2, l'ensemble $\{x_1\}$ est un ensemble vainqueur possible (et donc x_1 est vainqueur unique possible) pour P, obtenu par exemple avec le vecteur de seuils $\vec{k} = \langle 1, 3, 3 \rangle$. De plus, on a

$$PCS(P) = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1\}, \{x_3\}\},$$

et les vainqueurs uniques possibles sont donc x_1 et x_3.

Comme présenté dans la section 2.3.4, le vote par approbation peut aussi être utilisé pour des élections à vainqueurs multiples. Dans ce contexte, l'objectif est d'élire un sous-ensemble de candidats, avec parfois une contrainte sur la taille du comité, fixée à un entier K. Il existe de nombreuses procédures pour déterminer un comité vainqueur à partir du vote par approbation, présentées en section 2.3.4. La méthode la plus évidente est de choisir les K candidats avec le plus grand scores d'approbation, si il existe un contrainte sur la taille du comité, sinon on choisit les candidats approuvés par une majorité de votants.

5.3 En vote par approbation à vainqueur unique

Dans cette section, nous nous intéresserons au vote par approbation à vainqueur unique. Dans un premier temps, nous étudierons le vote par approbation sans contrainte sur le nombre de candidats approuvés par chaque votant. Dans un second temps, nous considérerons la situation où il existe des bornes sur le nombre de candidats à approuver pour chaque votant, c'est-à-dire le vote par $[d, k]$-approbation. Enfin, nous proposerons une étude expérimentale pour explorer deux questions : la résistance du vainqueur au choix des seuils et la probabilité d'élire le vainqueur de Borda lors d'un tirage aléatoire et uniforme des seuils d'approbation.

5.3.1 Sans contrainte sur le nombre d'approbations

Tout d'abord, remarquons que, sans aucune restriction sur les seuils autorisés, les notions de co-vainqueur possible, co-vainqueur nécessaire et vainqueur unique nécessaire ont un intérêt limité. En effet, tout candidat est co-vainqueur possible, aucun candidat n'est vainqueur unique nécessaire et un candidat x est un co-vainqueur nécessaire si et seulement si x est rangé en première place de chaque vote. Ces notions deviendront intéressantes en section 5.3.2 lorsque nous introduirons certaines restrictions sur les seuils autorisés.

Seule la notion d'ensemble co-vainqueur possible ne devient pas triviale. Considérons alors la question suivante : étant donné un profil d'ordres P et un sous-ensemble X' de candidats, X' est-il un ensemble vainqueur possible pour P ?

Rappelons qu'un candidat y domine au sens de Pareto un candidat x relativement à un profil d'ordres P si pour tout votant $i \in N$, on a $y \succ_i x$.

Le problème de l'ensemble co-vainqueur possible est facile dans le cas où X' est un singleton, en effet nous obtenons la caractérisation suivante pour les vainqueurs uniques possibles.

Théorème 10. *Un candidat x est un vainqueur unique possible pour P si et seulement si il n'existe pas de candidat de $X \setminus \{x\}$ qui domine x dans P.*

Preuve. Supposons qu'il n'existe pas de candidats y qui domine x dans P. Nous définissons le vecteur de seuils $\vec{k}$ par $k_i = \mathrm{rk}_P(i,x)$ pour tout $i \in N$. Alors, x est approuvé n fois dans $A^{P,\vec{k}}$. Si $y \neq x$ est aussi approuvé n fois dans $A^{P,\vec{k}}$, alors pour tout i, $\mathrm{rk}_P(i,y) \leq k_i$. Or, cela signifie que y domine x dans P, ce qui est contraire à l'hypothèse initiale. Ainsi $App(A^{P,\vec{k}}) = \{x\}$. Inversement, si y domine x dans P, alors pour tout $\vec{k}$, y est approuvé au moins autant de fois que x dans $A^{P,\vec{k}}$, et x n'est donc jamais un vainqueur unique. □

En conséquence, la restriction du problème de l'ensemble co-vainqueur possible à des singletons peut être résolue en temps polynomial. Mais cette propriété ne se généralise pas aux ensembles de taille arbitraire. En effet, le problème de l'ensemble co-vainqueur possible est difficile, même restreint à des ensembles de taille fixe, $\ell \geq 2$.

Pour démontrer ce résultat, commençons par prouver le lemme suivant.

Lemme 1. *Si $X' \in PCS(P)$, alors il existe un solution $(k_i)_{i\in N}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

(a) Pour tout $i \in N$, $k_i \in \{\mathrm{rk}_P(i,x) : x \in X'\}$.

(b) Le score de tout candidat co-vainqueur est au moins $\max_{x\in X'} pl(x,X')$.

Preuve. Considérons un ensemble de candidats $X' \in PCS(P)$.
Preuve de (a) : Soit $(k_i)_{i\in N}$ une solution telle que les candidats de $X' = \{x_1,\ldots,x_\ell\}$ soient exactement les co-vainqueurs pour P. Considérons un votant i et, sans perte de généralité, supposons que $x_1 \succ_i \cdots \succ_i x_\ell$. De plus, supposons que $k_i \notin \{\mathrm{rk}_P(i,x) : x \in X'\}$. Si $\mathrm{rk}_P(i,x_j) < k_i < \mathrm{rk}_P(i,x_{j+1})$ avec $j \in \{1,\ldots,\ell-1\}$, alors nous remplaçons k_i par $\mathrm{rk}_P(i,x_j)$. Si $k_i < \mathrm{rk}_P(i,x_1)$ ou $k_i > \mathrm{rk}_P(i,x_\ell)$, nous remplaçons k_i par $\mathrm{rk}_P(i,x_\ell)$. Il n'est pas difficile de voir que X' et toujours exactement l'ensemble co-vainqueur. En répétant cette procédure pour chaque votant, nous obtenons le résultat attendu.
Preuve de (b) : En utilisant (a), nous savons qu'il existe une solution $(k_i)_{i\in N}$ telle que le score global d'un candidat $x_j \in X'$ est au moins $pl(x_j,X')$. En effet, puisque les candidats de X' sont co-vainqueurs, il est nécessaire que chaque candidat de X' soit approuvé au moins $\max_{x\in X'} pl(x,X')$ fois. □

Nous pouvons maintenant montrer que le problème de l'ensemble co-vainqueur possible est difficile, même restreint à des ensembles de taille fixe, $\ell \geq 2$.

Théorème 11. *Étant donné un profil P, un entier $\ell \geq 2$ et un sous-ensemble de candidats X' tel que $|X'| = \ell$, décider si X' est un ensemble co-vainqueur possible pour P est NP-complet.*

Preuve. Le problème est clairement dans NP pour tout $\ell \geq 2$. Nous donnerons la preuve dans le cas où $\ell = 2$ pour expliquer ensuite comment la généraliser aux autres cas.

La preuve est basée sur une réduction depuis le problème EXACT 3-SET COVER (X3C par la suite). Une instance du problème X3C est constituée d'une famille de m ensembles

$\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ sur un ensemble de base $Y = \{y_1, \ldots, y_{3n}\}$ tel que $\bigcup_{i=1}^m S_i = Y$ et $|S_i| = 3$, pour $i = 1, \ldots, m$. La question est de savoir si il existe un sous-ensemble $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ de taille n tel que $\bigcup_{j \in J} S_j = Y$. Ce problème est montré NP-complet dans Garey et Johnson (1979).

Soit $I = (\mathcal{S}, Y)$, avec $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_{3n}\}$, une instance de X3C. Nous construisons une instance du problème de l'ensemble co-vainqueur possible, avec $\ell = 2$, comme suit. Nous considérons $2m - n$ votants, $N = \{1, \ldots, m-n\} \cup \{1', \ldots, m'\}$ et $m + 2n + 2$ candidats, $X = E \cup Y \cup \{a, b\}$ où $E = \{e_1, \ldots, e_{m-n}\}$. Enfin, nous posons $X' = \{a, b\}$ comme candidats cibles. Le profil P est défini par :

- Pour $1 \leq i \leq m - n$, $P_i : E \setminus \{e_i\} \succ_i Y \succ_i a \succ_i e_i \succ_i b$.
- Pour $1 \leq j \leq m$, $P_{j'} : b \succ_{j'} Y \setminus S_j \succ_{j'} E \succ_{j'} a \succ_{j'} S_j$.

Cela nous donne clairement une instance I' du problème de l'ensemble de co-vainqueur possible.

Maintenant, montrons qu'il existe un sous-ensemble $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ avec $|J| = n$ tel que $\bigcup_{j \in J} S_j = Y$ si et seulement si $\{a, b\}$ est un ensemble co-vainqueur possible pour P.

Supposons que I est une instance positive de X3C, c'est-à-dire, qu'il existe $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ avec $|J| = n$ tel que $\bigcup_{j \in J} S_j = Y$. Nous posons $k_{j'} = \mathrm{rk}_P(j', a)$ pour $j \in J$. Pour le reste des votants $i \in N \setminus \{j' : j \in J\}$, nous posons $k_i = \min\{\mathrm{rk}_P(i, a), \mathrm{rk}_P(i, b)\}$. Nous observons alors que a et b sont approuvés m fois tandis que les candidats de $E \cup Y$ sont approuvés au plus $m - 1$ fois. Ainsi $X' = \{a, b\}$ est un ensemble co-vainqueur possible.

Inversement, supposons que I' est une instance positive pour le problème de l'ensemble co-vainqueur possible. En utilisant (a) et (b) du lemme 1, nous savons qu'il existe une solution $(k_i)_{i \in N}$ où $k_i \in \{\mathrm{rk}_P(i, a); \mathrm{rk}_P(i, b)\}$, pour tout $i \in N$, et que a et b doivent être approuvés au moins m fois. Ainsi il existe $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ tel que $k_{j'} = \mathrm{rk}_P(j', a)$ pour $j \in J$ et $k_{j'} = \mathrm{rk}_P(j', b)$ pour $j \notin J$. En particulier, nous déduisons que $\bigcup_{j \in J} S_j = X$, car sinon tout candidat de $X \setminus \bigcup_{j \in J} S_j$ domine nécessairement a. Cela implique que $|J| \geq n$. De plus, si $|J| \geq n + 1$ alors a est approuvé au moins $m + 1$ fois. Ainsi, il existe au moins un votant $i \in \{1, \ldots, m - n\}$ tel que $k_i = \mathrm{rk}_P(i, b)$ (puisque a et b sont approuvés le même nombre de fois). Mais alors $app(e_i) \geq app(a)$, ce qui contredit le fait que a et b forment un ensemble co-vainqueur. Donc nous concluons que $|J| = n$ et $\bigcup_{j \in J} S_j = Y$, ainsi I est une instance positive pour $X3C$.

Nous prouvons ainsi que le problème de l'ensemble co-vainqueur possible est NP-complet quand il est restreint aux ensembles co-vainqueurs de taille 2. Pour étendre ce résultat aux ensembles co-vainqueurs de taille ℓ, il suffit de remplacer dans la preuve précédente a par $\{a_1, \ldots, a_{\ell-1}\}$ et de poser $X' = \{b\} \cup \{a_1, \ldots, a_{\ell-1}\}$, pour $\ell \geq 3$. $\square$

En résumé, sans contrainte sur le nombre de candidats approuvés, le seul problème difficile est le problème de l'ensemble co-vainqueur possible de taille fixée, supérieure ou égale à 2. De plus, nous obtenons une caractérisation simple des candidats vainqueurs uniques possibles.

Dans la section suivante, nous nous demanderons comment ces résultats s'étendent au cas où il existe des contraintes sur le nombre de candidats à approuver.

5.3.2 Avec contrainte sur le nombre d'approbations

Considérons une situation plus générale, le vote par $[d, k]$-approbation. Les notations suivantes sont des généralisations naturelles des notations de la section 5.2, avec la différence que chaque k_i doit être tel que $d \leq k_i \leq k$. L'ensemble des profils d'approbation compatibles avec P est défini par $AP_{d,k}(P) = \{A^{P,\vec{k}} \mid \vec{k} \in [d,k]^n\}$, et l'ensemble des ensembles co-vainqueurs possibles est noté $PCS_{d,k}(P)$.

Exemple (Suite de l'exemple 5.2). *En considérant le même profil d'ordres, nous obtenons par exemple* $PCS_{1,2}(P) = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$.

De même qu'en section 5.3.1, pour décider si un candidat x est un vainqueur unique possible, il est suffisant de le vérifier pour un choix spécifique de $\vec{k}$, correspondant au meilleur choix possible pour x.

Théorème 12. *Un candidat x est un vainqueur unique possible pour P si et seulement si x est vainqueur unique pour le vecteur de seuils $\vec{k}$, défini par $k_i = \mathrm{rk}_P(i,x)$ si $\mathrm{rk}_P(i,x) \in [d,k]$ et $k_i = d$ sinon.*

Preuve. L'implication ($\Leftarrow$) est vraie par définition. Pour l'implication inverse, supposons que $\{x\} \in PCS_{d,k}(P)$. Alors il existe un vecteur $(k'_i)_{i \in N}$ pour lequel x est vainqueur unique. Si $\vec{k}' = \vec{k}$, alors la preuve est terminée. Sinon, prenons le votant i avec le plus petit indice satisfaisant $k'_i \neq k_i$. Si $k'_i < k_i$ alors en effectuant $k'_i \leftarrow k_i$ nous augmentons d'une unité le score d'un ensemble de candidats qui contient x. Si $k'_i \geq k_i$, alors en posant $k'_i \leftarrow k_i$ le score de x n'est pas altéré, tandis que les scores des autres candidats diminuent ou stagnent. Dans tous les cas, x demeure vainqueur unique par l'opération $k'_i \leftarrow k_i$. En répétant ce procédé jusqu'à ce que $\vec{k}' = \vec{k}$, nous obtenons le résultat attendu. □

Le théorème 12 généralise le lemme 2 de l'article Brams et Sanver (2006). En effet, pour $d = 1$ et $k = m - 1$, nous retrouvons leur notion de *profil stratégique critique pour x*, définie comme suit : chaque votant qui range x comme le plus mauvais candidat approuve seulement un candidat ; les autres votants approuvent x et tous les candidats meilleures que lui. Alors x est un vainqueur unique possible si x est vainqueur dans son profil stratégique critique.

En corollaire, nous obtenons une caractérisation simple des candidats co-vainqueurs et vainqueurs uniques, possibles et nécessaires. Définissons deux notations :

$$D_P^+(x,y) = \{i \mid \mathrm{rk}_i(P,x) \leq k,\, \mathrm{rk}_i(P,y) > d \text{ et } x \succ_i y\}$$

et

$$D_P^-(x,y) = \{i \mid \mathrm{rk}_i(P,x) \leq d \text{ et } \mathrm{rk}_i(P,y) > k\}$$

Alors un candidat x est un co-vainqueur possible (respectivement vainqueur unique possible, vainqueur nécessaire, vainqueur unique nécessaire) pour P si et seulement si pour tout $y \neq x$, $|D_P^+(x,y)| \geq |D_P^-(y,x)|$ (respectivement, $|D_P^+(x,y)| > |D_P^-(y,x)|$, $|D_P^-(x,y)| \geq |D_P^+(y,x)|$, $|D_P^-(x,y)| > |D_P^+(y,x)|$).

Finalement, de façon analogue au cas sans contrainte, le problème de l'ensemble co-vainqueur possible pour le vote par $[d,k]$-approbation est difficile, même restreint à des ensembles de taille fixe, $\ell \geq 2$.

En effet, la preuve du théorème 11 peut être adaptée pour montrer que pour tout entier $\ell \geq 2$ et $d \geq 2$, décider si X' est un ensemble co-vainqueur possible pour le vote par $[d,k]$-approbation, sous la restriction que $|X'| = \ell$, est NP-complet, pour k quelconque.

Théorème 13. *Étant donnés un profil P, trois entiers $\ell \geq 2$, $d \geq 2$, et k, et un sous-ensemble de candidats X' tel que $|X'| = \ell$, décider si X' est un ensemble co-vainqueur possible sur P pour le vote par $[d,k]$-approbation est NP-complet.*

De plus, remarquons que le théorème 11 s'étend immédiatement au vote par $[1, m-2]$-approbation, car dans la preuve correspondante aucun votant n'approuve plus de $m-2$ candidats.

En résumé, les résultats obtenus avec contraintes sur le nombre d'approbations sont similaires à ceux du cas sans contrainte. Le seul problème difficile est le problème de l'ensemble co-vainqueur possible de taille supérieure ou égale à 2 et il existe une caractérisation des candidats vainqueurs uniques possibles. Cependant, nous obtenons en plus une caractérisation simple des candidats co-vainqueurs et vainqueurs uniques, possibles et nécessaires.

5.3.3 Étude expérimentale

Dans cette section, nous étudierons expérimentalement deux aspects du vote par approbation à vainqueur unique avec informations incomplètes : la résistance du vainqueur au choix des seuils et la probabilité d'élire le vainqueur de Borda avec un tirage aléatoire et uniforme des seuils. Cette étude expérimentale est conduite dans le but d'explorer ces deux questions. Elle n'a pour objectif de fournir des preuves expérimentales mais plutôt des indices sur le comportement du vote par approbation face à ces deux questions.

Tout d'abord commençons par présenter deux hypothèses sur les profils de préférences que nous utiliserons au cours de cette étude.

5.3.3.a Hypothèses sur les profils de préférences

Dans le cadre de cette étude expérimentale, nous utiliserons deux hypothèses sur le comportement des votant :

- L'hypothèse de culture impartiale simule une population de votants dont les avis sont le plus dispersés possible. Cela correspond à un profil dont les votes sont uniformément répartis sur l'ensemble des votes admissibles. Dans notre contexte, cela signifie que, pour constituer un profil, nous tirerons aléatoirement chaque vote avec une distribution de probabilité uniforme. On peut aussi interpréter cette hypothèse comme le comportement au pire cas d'une population, puisque dans tout autre modèle et dans les expérimentations réelles, les votes seront toujours moins uniformément dispersés.
- Le modèle de Mallows simule une population qui se trouve centrée autour d'un vote de référence. Ce modèle est paramétré par le choix d'un vote de référence et d'un coefficient de dispersion qui définit à quel point la population est dispersée autour de ce vote. Tout d'abord, définissons le coefficient de corrélation de Kendall, $\tau(u, v)$, entre deux ordres u, v :

$$\tau(u, v) = \frac{Con(u, v) - Dic(u, v)}{\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)},$$

où $Con(u, v)$ est égal au nombre de comparaisons par paires concordantes entre u et v, et $Dis(u, v)$ est égal au nombre de comparaisons par paires discordantes entre u et v. Étant donnés un vote de référence v_0 et une dispersion θ, la probabilité qu'un vote v soit tiré dépend seulement de la distance de Kendall-Tau entre v et v_0. Formellement, elle est égale à : $P(v) = K_1 \cdot \theta^{(K_2 \cdot \tau(v_0, v))}$, où K_1 et K_2 désignent des coefficients de normalisation. Ce modèle nous permet de simuler des comportements qui se situent entre la culture impartiale (dispersion maximale, $\theta = 1$) et la situation où tous les votants sont d'accord sur le vote de référence (dispersion nulle, $\theta = 0$).

5.3.3.b Sensibilité au seuil

Étant donné un profil d'ordres, nous avons vu que l'issue du vote dépend du seuil d'approbation choisi par chaque votant. Une question naturelle est de savoir à quel point l'élection d'un candidat est sensible à une modification des seuils. Nous étudierons cette question au travers d'une étude expérimentale.

Nous commençons par étudier l'hypothèse de culture impartiale.

Nous avons généré $5 \cdot 10^3$ profils d'ordres à l'aide d'une distribution uniforme (hypothèse de culture impartiale). Pour chacun de ces profils nous avons tirés $5 \cdot 10^3$ vecteurs de seuils avec une distribution uniforme [5]. Puis, pour chacun de ces vecteurs de seuils, nous

5. Dans les deux hypothèses retenues pour cette étude (culture impartiale et modèle de Mallows), nous tirerons les vecteurs de seuils avec une distribution de probabilité uniforme.

calculons le candidat vainqueur [6]. Ainsi, pour chacun des profils d'ordres, nous obtenons la probabilité de gagner de chaque candidat. Ensuite, nous ordonnons les probabilités de gagner dans l'ordre décroissant pour calculer la moyenne, sur l'ensemble des profils d'ordres, de la plus grande probabilité de gagner.

Les résultats de ces expérimentations sont résumés dans le tableau 5.1.

m\ n	5	20	50	100
5	0,56	0,59	0,55	0,55
20	0,33	0,35	0,35	0,35
50	0,24	0,27	0,27	0,27
100	0,18	0,22	0,23	0,23

TABLE 5.1 – Plus grande probabilité de gagner sous l'hypothèse de culture impartiale.

Nous observons que la plus grande probabilité de gagner est relativement élevée (au-dessus de 0,55) lorsque le nombre de candidats est faible et pour tout nombre de votants. Cette probabilité décroît quand le nombre de candidats augmente, ce qui est cohérent car le nombre de votes admissibles augmente. De plus, cette probabilité semble être indépendante du nombre de votants. Les écarts observés lorsque $n = 5$ s'expliquent par le fait qu'avec 5 votants, il faudrait tirer un plus grand nombre de profils pour obtenir une distribution des votes significativement uniforme. Pour vérifier expérimentalement cette indépendance, observons l'évolution de la probabilité en fonction du nombre de votants.

La figure 5.1 représente la plus grande probabilité de gagner en fonction du nombre de votants, pour les cas où le nombre de candidats est égal à 5, 20 et 50.

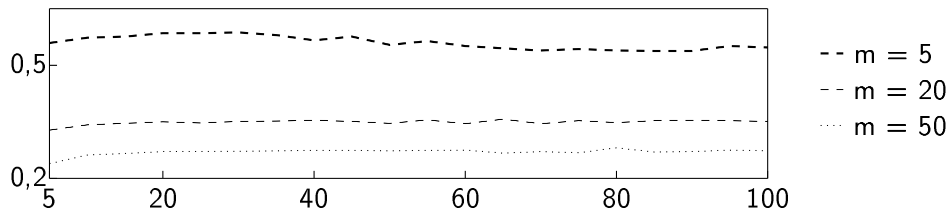

FIGURE 5.1 – Plus grande probabilité de gagner en fonction du nombre de votants.

L'hypothèse d'indépendance de la probabilité de gagner par rapport au nombre de votants semble expérimentalement validée. De plus, nous retrouvons le fait que cette probabilité décroît lorsque le nombre de candidats augmente.

De façon similaire au calcul de la plus grande probabilité de gagner, nous obtenons les secondes et troisièmes plus grandes probabilités de gagner. La figure 5.2 nous présente l'évolution de ces probabilités en fonction du nombre de candidats, pour $n = 5$.

Ces trois probabilités se comportent de la même façon. On retrouve le fait qu'elles diminuent lorsque l'on augmente le nombre de candidats. Cette diminution se ralentit au

6. Nous utilisons un mécanisme de départage des ex aequo aléatoire et uniforme en cas d'égalité.

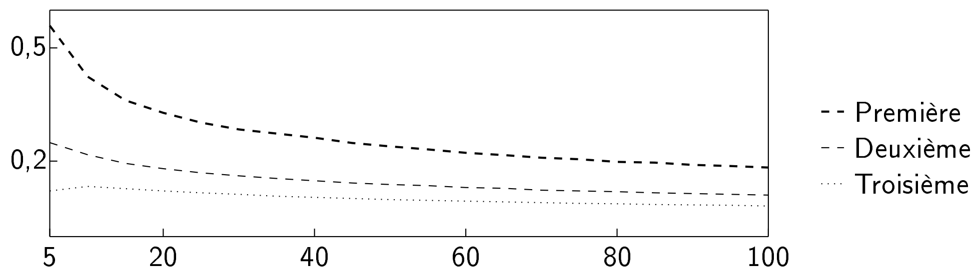

FIGURE 5.2 – Les trois plus grandes probabilités de gagner en fonction du nombre de candidats, pour $n = 5$.

fur et à mesure, laissant supposer que les différentes probabilités tendent vers une limite. Pour explorer cette hypothèse, nous avons augmenté le nombre de candidats jusqu'à 275. Nous obtenons alors les probabilités résumées dans la figure 5.3.

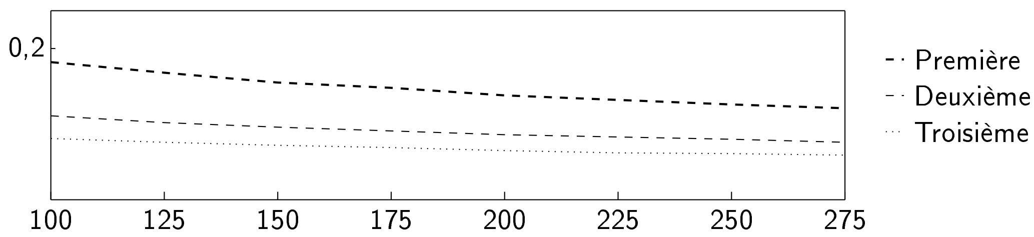

FIGURE 5.3 – Les trois plus grandes probabilités de gagner en fonction du nombre de candidats, pour $n = 5$

On observe que la décroissance des probabilités est toujours significative, ce qui contredit en partie l'idée que ces probabilités tendent vers une limite. Pour valider ou infirmer cette hypothèse, une étude théorique de la distribution des probabilités de gagner semble nécessaire mais nous ne la proposerons pas dans le cadre de cette étude expérimentale.

Considérons maintenant une autre distribution de probabilité sur les votes, la distribution de Mallows.

Le modèle de Mallows est paramétré à l'aide de deux paramètres qui sont le vote de référence et la dispersion. Sans conséquence sur les résultats, nous choisissons comme vote de référence l'ordre lexicographique sur les candidats. De plus, nous présenterons seulement les résultats des expérimentations associées à la valeur de dispersion de 0,5 [7].

À l'aide du modèle de Mallows, nous avons effectué les mêmes expérimentations qu'avec l'hypothèse de culture impartiale. Les résultats de ces expérimentations sont résumés dans le tableau 5.2.

Tout d'abord nous observons que la plus grande probabilité de gagner est plus élevée avec le modèle de Mallows qu'avec une distribution uniforme. Cela est cohérent puisque

7. Avec des dispersions sensiblement différentes, nous obtenons des résultats similaires à ceux présentés.

m\ n	5	20	50	100
5	0,67	0,82	0,93	0,98
20	0,41	0,62	0,75	0,86
50	0,24	0,46	0,60	0,71
100	0,15	0,33	0,48	0,59

TABLE 5.2 – Plus grande probabilité de gagner avec le modèle de Mallows.

le modèle de Mallows simule une population moins dispersée que la distribution uniforme. De plus, on observe une nouvelle fois que la probabilité diminue lorsque le nombre de candidats augmente. Par contre, contrairement au cas uniforme, nous remarquons que cette probabilité augmente lorsque l'on augmente le nombre de votants. En effet, plus le nombre de votants est grand, plus le nombre de votes à proximité du vote de référence est élevé, ce qui implique une plus grande stabilité autour du vote de référence lors du tirage des vecteurs de seuils.

De plus, nous calculons aussi la moyenne des secondes et troisièmes probabilités les plus grandes. La figure 5.4 nous présente l'évolution de ces probabilités en fonction du nombre de candidats, pour $n = 5$.

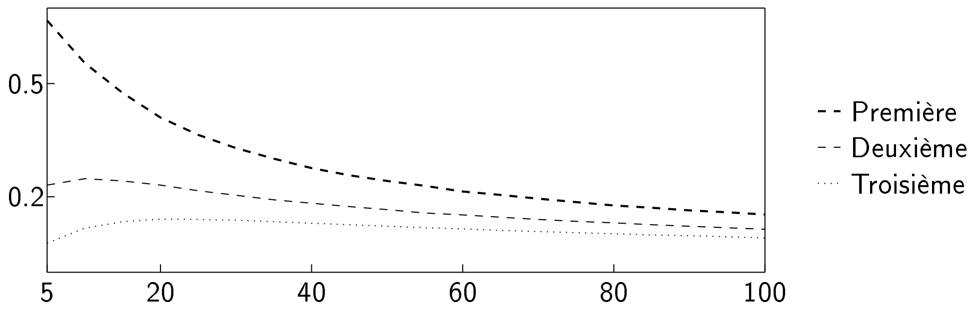

FIGURE 5.4 – Les trois plus grandes probabilités de gagner en fonction du nombre de candidats, pour $n = 5$.

Encore une fois, le comportement de ces trois probabilités semble similaire. On retrouve le fait qu'elles diminuent lorsque l'on augmente le nombre de candidats. Cette diminution se ralentit au fur et à mesure de façon similaire au ralentissement observé avec l'hypothèse de culture impartiale.

En conclusion, l'issue du vote par approbation est la plus stable lorsque le nombre de votants est élevé et le nombre de candidats faible. En effet, la plus grande probabilité de gagner atteint 0,55 sous l'hypothèse de culture impartiale et jusqu'à 0,98 sous le modèle de Mallows (avec un nombre de votants égal à 100). Cependant, lorsque le nombre de candidats augmente, cette probabilité décroît rapidement, ce qui rend l'issue du vote bien moins prévisible.

5.3.3.c Probabilité d'élire le vainqueur de Borda lors d'un vote par approbation

Dans cette section, nous étudions la probabilité d'élire le vainqueur de Borda lorsqu'étant donné un profil d'ordres, nous procédons à un vote par approbation en tirant aléatoirement et uniformément l'ensemble des seuils d'approbation.

Rappelons qu'étant donnés un profil d'ordres P sur X et un vecteur de seuils $\vec{k}$, nous avons défini $A^{P,\vec{k}}$ comme étant le profil d'approbations induit par $\vec{k}$ sur P, formellement :

$$A^{P,\vec{k}} = \langle (P_1)^{1\to k_1}, \ldots, (P_n)^{1\to k_n} \rangle$$

Étant donné un profil d'ordres, P, nous tirons un vecteur de seuils, $\vec{k}$, de façon aléatoire et uniforme. Nous obtenons alors un profil d'approbations $A^{P,\vec{k}}$, et un candidat vainqueur [8] pour ce profil. Il est alors clair que le score d'approbation espéré d'un candidat dans $A^{P,\vec{k}}$ est proportionnel à son score de Borda dans P. Ainsi, le vainqueur de Borda possède le plus grand score d'approbation espéré.

Cependant, la question que l'on se pose ici est de savoir à quelle fréquence le vainqueur de Borda d'un profil P est élu lorsque l'on tire de façon uniforme les seuils d'approbations. Plus précisément, on cherche à savoir si le vainqueur de Borda est le candidat avec la plus grande probabilité de gagner dans cette situation. On sait que le vainqueur de Borda possède le plus grand score d'approbation espéré mais on sait aussi que le candidat qui possède le plus grand score d'approbation espéré n'est pas nécessairement le candidat qui gagne le plus souvent. L'exemple [9] suivant illustre cette situation.

Exemple 5.3. *Considérons un ensemble de quatre votants, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, un ensemble de quatre candidats $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et le profil d'ordres suivant :*

$$\begin{array}{ll} P_1 : & x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4 \\ P_2 : & x_1 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_3 \\ P_3 : & x_2 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_4 \\ P_4 : & x_2 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_4 \end{array}$$

Les scores de Borda de x_1, x_2, x_3 et x_4, sont respectivement 8, 8, 6 et 2. Les candidats x_1 et x_2 ont le même score de Borda puisque leurs positions dans les votes sont symétriques. Ainsi les scores d'approbations espérés des candidats x_1 et x_2 sont les mêmes.
Cependant à cause des positions de x_3 et x_4, la situation n'est pas totalement symétrique. En particulier, étudions les deux vecteurs de seuils $(2, 2, 0, 0)$ et $(0, 0, 2, 2)$, qui sont symétriques par rapport à x_1 et x_2. Le premier vecteur de seuils conduit à un unique candidat vainqueur par approbation, x_1, tandis que le second conduit à deux candidats vainqueurs ex aequo, x_2 et x_3. Ainsi, le candidat x_1 possède une probabilité de gagner lors d'un vote par approbation légèrement supérieure à celle de x_2, alors que ces deux candidats sont vainqueurs de Borda.

8. En cas d'égalité, nous utilisons un mécanisme de départage randomisé avec une distribution de probabilité uniforme.

9. Je remercie Justin Kruger qui a porté cet exemple à ma connaissance.

Nous allons donc étudier expérimentalement la fréquence avec laquelle le vainqueur de Borda est élu lors d'un vote par approbation avec tirage aléatoire et uniforme des seuils. Comme précédemment, nous commençons par tirer les profils d'ordres selon l'hypothèse de culture impartiale, pour revenir au modèle de Mallows par la suite.

La démarche est similaire à celle des expérimentations précédentes. Nous avons généré 10^3 profils d'ordres à l'aide d'une distribution uniforme (hypothèse de culture impartiale). Pour chacun de ces profils nous avons tirés 10^3 vecteurs de seuils avec une distribution uniforme. Puis, pour chacun de ces vecteurs de seuils, nous calculons le candidat vainqueur [10]. Ainsi, pour chacun des profils d'ordres, nous obtenons la probabilité de gagner de chaque candidat. Ensuite, nous comparons le candidat qui possède la plus grande probabilité de gagner (appelé candidat élu par la suite) avec le vainqueur de Borda, pour chaque profil d'ordres tiré. En agrégeant ces résultats, nous obtenons alors la probabilité que le candidat avec la plus grande probabilité de gagner soit le vainqueur de Borda. Dans le tableau 5.2 se trouve la probabilité que le candidat avec la plus grande probabilité de gagner soit un vainqueur de Borda, sous l'hypothèse de culture impartiale.

m\ n	5	20	50	100
5	0,82	0,90	0,92	0,94
20	0,76	0,82	0,86	0,89
50	0,75	0,80	0,85	0,87
100	0,74	0,79	0,84	0,87

TABLE 5.3 – Probabilité que le candidat élu soit vainqueur de Borda, sous l'hypothèse de culture impartiale.

Tout d'abord, on remarque que ces probabilités varient entre 0,74 et 0,94, cela confirme que le tirage aléatoire des seuils tend à élire le vainqueur de Borda.

De plus, on observe que les probabilités diminuent lorsque le nombre de candidats augmente. Ceci s'explique par l'augmentation du nombre de votes admissibles et donc il existe une plus grande probabilité que les votes soient dispersés.

Inversement, les probabilités augmentent lorsque le nombre de votants augmente. On peut expliquer cela par le fait qu'en augmentant le nombre de votants, on diminue les chances de se trouver dans un profil pathologique où le vainqueur de Borda n'est pas celui qui gagne les plus souvent. Cependant, ces probabilités ne tendent pas vers 1 lorsque le nombre de votants augmente, car on sait qu'il existe des profils pour lesquels le vainqueur de Borda n'est pas le candidat avec la plus grande probabilité de gagner. On peut alors se demander, par exemple pour $n = 20$ et $m = 20$, quelle est la part des profils où le candidat choisi n'est effectivement pas le vainqueur de Borda et la part des profils où le tirage de 10^3 vecteurs de seuils n'est pas suffisant pour détecter le véritable candidat qui possède la plus grande probabilité de gagner. Pour la situation $n = 20$ et $m = 20$, en multipliant par dix le nombre de vecteurs de seuils tirés, on obtient une probabilité de $0,83$. La probabilité

10. Nous utilisons un mécanisme de départage des ex aequo aléatoire uniforme en cas d'égalité.

d'élire un vainqueur de Borda n'augmente donc pas de façon significative, c'est-à-dire qu'elle n'augmente pas assez pour remettre en question l'existence de nombreux profils pour lesquels le candidat avec la plus grande probabilité d'être élu n'est pas un vainqueur de Borda.

La figure 5.5 détaille la probabilité d'élire un candidat vainqueur de Borda en fonction du nombre de candidats, pour un nombre de votants égal à 5, 20 et 50. On retrouve dans ce graphique une partie des résultats du tableau précédent.

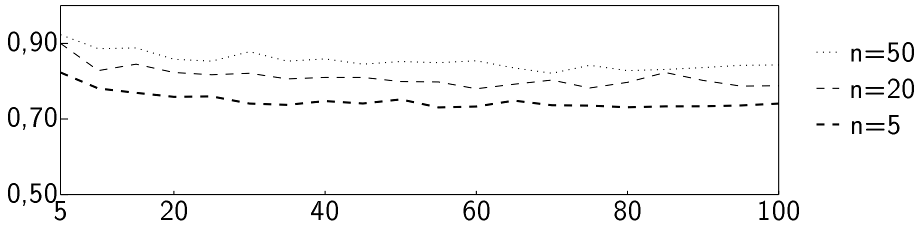

FIGURE 5.5 – Probabilité que le candidat élu soit un vainqueur de Borda en fonction du nombre de candidats, sous l'hypothèse de culture impartiale.

On observe que la décroissance des probabilités lorsque l'on augmente le nombre de candidats est faible et semble même stagner assez rapidement. De plus, pour tout nombre de candidats, on retrouve la fait que la probabilité croît lorsque le nombre de votants croît.

La probabilité d'élire un candidat vainqueur de Borda est donc relativement élevée sous l'hypothèse de culture impartiale. Intéressons nous maintenant au rapport entre le score de Borda du candidat élu et du vainqueur de Borda. La figure 5.6 présente le rapport entre le score de Borda du candidat élu et celui du vainqueur de Borda en fonction du nombre de candidats, pour un nombre de votants égal à 5, 20 et 50.

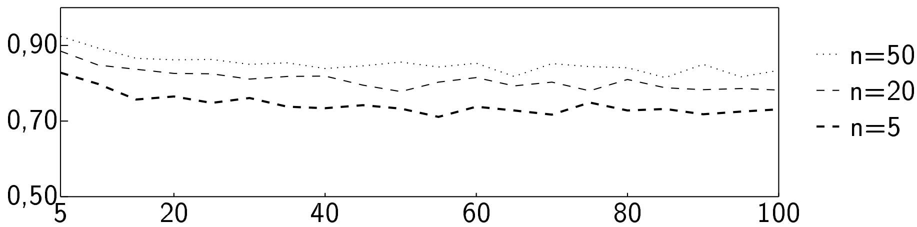

FIGURE 5.6 – Rapport entre les scores de Borda du candidat élu et du vainqueur de Borda en fonction du nombre de candidats, sous l'hypothèse de culture impartiale.

On observe simplement que le rapport entre les scores de Borda du candidat élu et du vainqueur de Borda se comporte de façon similaire au courbe de probabilité d'élire un vainqueur de Borda.

Études maintenant la probabilité d'élire un vainqueur de Borda avec le modèle de Mallows comme hypothèse sur les profils.

Dans le tableau 5.2 se trouvent les probabilités que le candidat avec la plus grande probabilité de gagner soit un vainqueur de Borda, sous le modèle de Mallows.

m\ n	5	20	50	100
5	0,82	0,97	0,99	0,99
20	0,97	0,86	0,97	0,99
50	0,75	0,66	0,87	0,98
100	0,74	0,67	0,69	0,89

TABLE 5.4 – Probabilité que le candidat élu soit vainqueur de Borda, avec le modèle de Mallows

On observe que les probabilités sont similaires à celles obtenues avec l'hypothèse de la culture impartiale. En fait, ces probabilités sont presque toutes plus élevées que dans le cas de la distribution uniforme, ce qui est cohérent puisque la distribution uniforme correspond au pire des cas. Cependant, on observe qu'il existe toujours des profils pour lesquels le candidat élu n'est pas un vainqueur de Borda. De plus, comme dans le cas de la distribution uniforme, la probabilité augmente lorsque le nombre de votants augmente et diminue lorsque le nombre de candidats augmente.

La figure 5.7 détaille la probabilité d'élire un candidat vainqueur de Borda en fonction du nombre de candidats, pour un nombre de votants égal à 5, 20 et 50.

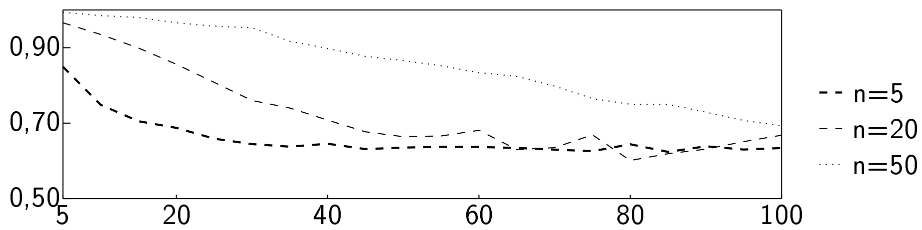

FIGURE 5.7 – Probabilité d'élire un vainqueur de Borda en fonction du nombre de candidats, avec le modèle de Mallows.

Encore une fois, on observe que la décroissance des probabilités est faible et ralentit lorsque l'on augmente le nombre de candidats. De même, pour tout nombre de candidats, on remarque que la probabilité augmente lorsque le nombre de votants augmente.

La probabilité d'élire un candidat vainqueur de Borda est donc plus élevée dans le cas de modèle de Mallows que dans le cas de la distribution uniforme. De façon similaire à l'hypothèse de culture impartiale, intéressons nous maintenant au rapport entre le score de Borda du candidat élu et du vainqueur de Borda. La figure 5.8 détaille le rapport entre les scores de Borda du candidat élu et du vainqueur de Borda en fonction du nombre de candidats, pour un nombre de votants égal à 5, 20 et 50.

Dans ce cas aussi le rapport entre le score de Borda du candidat élu et du vainqueur de Borda se comporte de façon similaire aux courbes de probabilité d'élire un vainqueur de Borda.

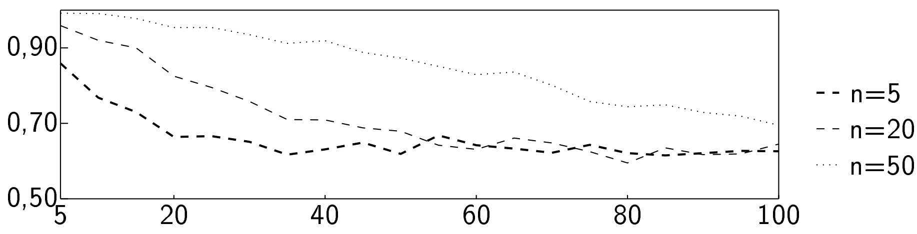

FIGURE 5.8 – Rapport entre les scores de Borda du candidat élu et du vainqueur de Borda en fonction du nombre de candidats, avec le modèle de Mallows.

En résumé, la probabilité que le candidat qui possède la plus grande probabilité d'être élu soit vainqueur de Borda est relativement élevée (supérieure à 0,74). Cette probabilité diminue légèrement lorsque le nombre de candidats augmente, et augmente lorsque le nombre de votants augmente. De plus, le modèle de Mallows produit des probabilités plus élevées que l'hypothèse de la culture impartiale.

5.3.4 Résumé

Cette section porte sur l'étude des problèmes de vainqueurs possibles et nécessaires dans le contexte du vote par approbation à vainqueur unique.

Tout d'abord, nous étudions ces problèmes dans le vote par approbation sans contrainte sur le nombre de candidats approuvés. Dans ce contexte, le seul problème difficile est le problème de l'ensemble co-vainqueur possible de taille fixée, supérieure ou égale à 2. De plus, nous obtenons une caractérisation simple des candidats vainqueur unique possible.

Puis, avec des contraintes sur le nombre d'approbations, les résultats obtenus sont similaires à ceux du cas précédant. Le seul problème difficile est le problème de l'ensemble co-vainqueur possible de taille fixée, supérieure ou égale à 2 et il existe une caractérisation des candidats vainqueurs uniques possibles. Cependant, nous obtenons en plus une caractérisation simple des candidats co-vainqueurs et vainqueurs uniques, possibles et nécessaires.

Enfin, nous proposons une étude expérimentale pour explorer deux questions : la sensibilité du vainqueur au choix des seuils et la proximité entre le candidat qui possède la plus grande probabilité d'être élu et le vainqueur de Borda.
L'issue du vote par approbation est la plus stable lorsque le nombre de votants est élevé et le nombre de candidats faible, atteignant 0,55 sous l'hypothèse de culture impartiale et 0,98 sous le modèle de Mallows. Cependant, lorsque le nombre de candidats augmente, cette probabilité décroît rapidement, ce qui rend l'issue du vote bien moins prévisible.
La probabilité que le candidat qui possède la plus grande probabilité d'être élu soit le vainqueur de Borda est relativement élevé (supérieur à 0,74). Cette probabilité diminue légèrement lorsque le nombre de candidats augmente, et augmente lorsque le nombre de votants augmente. De plus, le modèle de Mallows produit des probabilités plus élevées que l'hypothèse de la culture impartiale.

5.4 En vote par approbation à vainqueurs multiples

Dans cette section, nous nous concentrerons sur le vote par approbation à vainqueurs multiples de taille fixée, ℓ. Cette section est liée au chapitre 3 dans lequel nous étudions le vote par approbation à vainqueurs multiples (cependant sans contrainte sur la taille du comité à élire).

Commençons par étendre les problèmes présentés dans la section précédente au contexte où plusieurs candidats sont vainqueurs.

La notion centrale ici est celle de ℓ-comité vainqueur possible en vote par approbation à vainqueurs multiples. Un *ℓ-comité vainqueur possible* d'un profil P est un sous-ensemble $X' \subseteq X$, de taille ℓ, pour lequel il existe un vecteur de seuils $\vec{k} = (k_i)_{i \in N}$ tel que si chaque votant i approuve ses k_i meilleurs candidats, alors X' est le ℓ-comité vainqueur (unique) pour le profil d'approbations correspondant, $A^{P,\vec{k}}$.

La question qui nous intéresse est alors de déterminer si un comité donné peut être vainqueur pour un profil donné : étant donnés un profil d'ordres P sur X et un sous-ensemble X' de candidats, X' est-il un ℓ-comité vainqueur possible pour P ?

En ce qui concerne les comités, nous étudierons seulement le problème du ℓ-comité vainqueur possible. En effet, le problème du ℓ-comité co-vainqueur possible [11] est trivial car si chaque votant approuve tous les candidats, alors chaque ℓ-comité est co-vainqueur. Ainsi tous les ℓ-comités sont des ℓ-comités co-vainqueurs possibles.

En ce qui concerne les candidats, un candidat $x \in X$ est dit vainqueur possible si il appartient à au moins un ℓ-comité vainqueur possible, et vainqueur nécessaire si il appartient à tout ℓ-comité vainqueur possible.

Ces notions peuvent être généralisées au vote par $[1, k]$-approbation. Nous pouvons alors définir le problème du ℓ-comité vainqueur possible sur le vote par $[1, k]$-approbation.

Enfin, il existe de nombreuses procédures pour déterminer le comité vainqueur en vote par approbation à vainqueurs multiples. Ces procédures sont décrites en section 2.3.4.

Dans un premier temps, nous nous concentrerons sur l'approbation simple qui choisit les ℓ candidats avec le plus grand score d'approbation comme comité vainqueur. D'abord, nous étudierons le problème du ℓ-comité vainqueur possible. Puis, nous nous intéresserons aux candidats vainqueurs possibles et nécessaires. Dans un second temps, nous étendrons partiellement les résultats obtenus aux autres règles fondées sur le vote par approbation à vainqueurs multiples.

11. Un comité est un ℓ-comité co-vainqueur possible si il est co-vainqueur dans un profil d'approbations compatible.

5.4.1 Approbation simple

5.4.1.a Comité vainqueur possible

Dans cette section, nous étudions le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour le vote par approbation simple.

Avant d'étudier la complexité de ce problème, observons le lemme 2.

Lemme 2. *Étant donnés un profil P et un sous-ensemble de candidats $X' = \{x'_1, x'_2\}$. Si X' est un 2-comité vainqueur possible pour P alors il existe une solution $(k_i)_{i \in N}$ satisfaisant l'équation suivante : $|\{i \in N : \mathrm{rk}_P(i, x'_1) \leq k_i\}| = |\{i \in N : \mathrm{rk}_P(i, x'_2) \leq k_i\}|$, ce qui signifie que x'_1 et x'_2 possède le même score d'approbation.*

Preuve. Considérons un profil P, un 2-comité vainqueur possible, $X' = \{x'_1, x'_2\}$, et un vecteur de seuils $(k_i)_{i \in N}$ tel que X' est vainqueur unique. Sans perte de généralité, considérons la situation où $app(x'_1) > app(x'_2)$. Alors il existe un sous-ensemble de votants $N' \subset N$ de taille $(app(x'_1) - app(x'_2))$ tel que, pour chaque votant $i \in N'$, on a $\mathrm{rk}_P(i, x'_1) \leq k_i < \mathrm{rk}_P(i, x'_2)$.
Nous construisons une nouvelle solution $(k'_i)_{i \in N}$ telle que :

(*i*) Pour $i \in N'$, $k'_i = \mathrm{rk}_P(i, x'_2)$.

(*ii*) Pour $i \in N \backslash N'$, $k'_i = k_i$.

En comparaison avec la solution $(k_i)_{i \in N}$, le score de x'_2 augmente de $(app(x'_1) - app(x'_2))$, le score de x'_1 est inchangé et le score des candidats de $x \in X \backslash X'$ augmente d'au plus $(app(x'_1) - app(x'_2))$. Ainsi X' demeure l'unique comité vainqueur et le score de x'_1 est égal au score de x'_2. □

Nous pouvons maintenant montrer que le problème du 2-comité vainqueur possible est un problème difficile à résoudre pour le vote par approbation simple.

Théorème 14. *Pour l'approbation simple, le problème du 2-comité vainqueur possible est NP-complet.*

Preuve. La preuve est basée sur une réduction depuis le problème de la section 5.3.1, le 2-ensemble co-vainqueur possible. Une instance du 2-ensemble co-vainqueur possible est définie par un ensemble de votants N, un ensemble de candidats X, un profil P, et un sous-ensemble de candidats X' de taille 2. L'objectif est de déterminer si il existe un vecteur $(k_i)_{i \in N}$ tel que si chaque votant i approuve ses k_i meilleurs candidats alors l'ensemble co-vainqueur est X'. Ce problème est montré NP-complet dans le théorème 11.
Soit $I = (P, N, X, X')$ une instance du 2-ensemble co-vainqueur possible. À partir de I, nous construisons une instance du 2-comité vainqueur possible avec les mêmes N, X, P,

et X'. Nous allons montrer qu'il existe une solution pour I si et seulement si il existe une solution pour I'.

Clairement, si il existe une solution pour I, alors le même vecteur (k_i) est aussi une solution pour I'.

Inversement, supposons qu'il existe une solution $(k_i)_{i \in N}$ pour I'. D'après le lemme 2, nous savons qu'il existe une solution $(k'_i)_{i \in N}$ telle que x'_1 et x'_2 ont le même score d'approbation. Ainsi le vecteur $(k'_i)_{i \in N}$ est une solution pour I. □

Cela prouve que le 2-comité vainqueur possible est un problème NP-complet. Nous pouvons étendre ce résultat au ℓ-comité vainqueur possible, pour $\ell \geq 2$, de la manière suivante.

Théorème 15. *Pour l'approbation simple, le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet, pour $\ell \geq 2$.*

Preuve. La preuve est une réduction depuis le problème du 2-comité vainqueur possible.

Soit $I = (P, N, X, X')$ une instance du 2-comité vainqueur possible. À partir de I nous construisons $I' = (P', N', Y, Y', \ell)$, une instance du ℓ-comité vainqueur possible de la façon suivante :

- $N' = N$,
- $Y = X \cup E$,
- $Y' = X' \cup E$.

L'ensemble $E = \{e_i\}_{i=1\ldots\ell-2}$ est un ensemble de $\ell - 2$ candidats factices. Pour tout votant $i \in N$, les préférences entre deux candidats de X sont inchangées. Pour prendre en compte les candidats factices, nous ajoutons les préférences suivantes : pour tout $i \in N'$, et pour tout $y \in Y \backslash E$, $e_1 >_i e_2 >_i \ldots e_{\ell-2} >_i y$.

Nous allons alors montrer qu'il existe une solution pour l'instance I si et seulement si il existe une solution pour l'instance I'.

Supposons qu'il existe une solution $(k_i)_{i \in N}$ pour I. Nous considérons le vecteur $(k'_i)_{i \in N'}$ pour I' tel que $k'_i = k_i + (\ell - 2)$. Les candidats factices $\{e_i\}_{i=1\ldots\ell-2}$ dominent les candidats $y \in Y \backslash E$, et par conséquent, les $\ell - 2$ candidats factices sont nécessairement dans le comité vainqueur. De plus nous observons que le score d'approbation des candidats $y \in Y \backslash E$ est le même que celui des candidats correspondants dans $x \in X$. Ainsi les scores d'approbation des candidats cibles y'_1 et y'_2 sont supérieurs aux scores des candidats de $y \in Y \backslash Y'$. Le vecteur $(k'_i)_{i \in N'}$ est donc solution de I'.

Inversement, supposons qu'il existe une solution $(k'_i)_{i \in N}$ pour l'instance I'. Alors nous considérons le vecteur $(k_i)_{i \in N}$ pour I tel que

$$k_i = \begin{cases} k'_i - (\ell - 2), & \text{si } k'_i \geq (\ell - 2), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec ce vecteur, les candidats $x \in X$ de I ont le même score d'approbation que les candidats correspondants de $y \in Y \backslash E$ de I'. Ainsi, le comité $X' = \{x'_1, x'_2\}$ est un le comité vainqueur de I. $\square$

Cela montre que le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet pour le vote par approbation simple. Ce résultat est généralisé au vote par $[1,k]$-approbation par le théorème 16.

Théorème 16. *Pour le vote par $[1,k]$-approbation simple, $k \geq 3$, le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet, pour $\ell \geq 2$.*

Preuve. La preuve est basée sur une réduction à partir du ℓ-comité vainqueur possible, consistant à ajouter un ensemble de candidats factices à la fin de chaque vote, comme dans la preuve du théorème 15. $\square$

En résumé, avec ou sans contrainte sur le nombre de candidats approuvés, le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet pour l'approbation simple, pour tout $\ell \geq 2$.

5.4.1.b Candidat vainqueurs possibles et nécessaires

Dans cette section, nous étudierons la caractérisation de l'appartenance possible et nécessaire d'un candidat à un ℓ-comité vainqueur, en commençant par l'appartenance possible à un ℓ-comité vainqueur. Nous obtenons deux caractérisations simples des candidats vainqueurs possibles et vainqueurs nécessaires.

Proposition 5.1. *Pour l'approbation simple, un candidat x est candidat vainqueur possible pour P si et seulement si x n'est pas Pareto-dominé par ℓ candidats ou plus dans P.*

Preuve. Supposons que x appartienne à un ℓ-comité vainqueur possible, alors les candidats qui dominent x sont aussi dans ce comité. Ainsi, au plus $\ell - 1$ candidats dominent le candidat x.
Inversement, supposons que x soit dominé par $\ell - 1$ candidats ou moins, et observons le vecteur de seuils suivant : pour tout $i \in N, k_i = \mathrm{rk}_P(i,x)$. Seuls x et les candidats qui le dominent ont un score d'approbation égal à n. Donc x est membre d'un ℓ- comité vainqueur. $\square$

L'appartenance nécessaire d'un candidat à l'ensemble des ℓ-comités vainqueurs est caractérisée dans la proposition suivante.

Proposition 5.2. *Pour l'approbation simple, un candidat x est candidat vainqueur nécessaire pour P si et seulement si x domine $(n - \ell)$ candidats ou plus dans P.*

Preuve. Supposons que x soit membre nécessaire de tout ℓ-comité vainqueur et que x ne domine que $(n - \ell - 1)$ candidats ou moins. Et étudions le vecteur suivant : pour tout

$i \in N, k_i = \mathrm{rk}_P(i, x) - 1$. Alors le score d'approbation de x est 0 et il existe au moins ℓ candidats qui ne sont pas dominés par x et qui possèdent donc un score d'approbation non nul. Ainsi le ℓ-comité vainqueur ne contient pas x, ce qui contredit l'hypothèse.
Inversement, supposons que x domine $(n - \ell)$ candidats ou plus, et supposons qu'il existe un ℓ comité, S, tel que S ne contienne pas x. Il n'existe que $\ell - 1$ candidats qui ne sont pas dominés par x, donc il existe dans S un candidat qui est dominé par x et x doit donc appartenir à ce ℓ-comité vainqueur. □

En conséquence des propositions 5.1 et 5.2, les singletons de candidats qui sont membres possibles ou nécessaires d'un ℓ-comité vainqueur dans un profil P peuvent être identifiés en temps polynomial. Cette propriété ne s'étend pas au sous-ensemble de taille arbitraire. En effet, le théorème 17 nous montre que cela est difficile.

Théorème 17. *Pour l'approbation simple, décider si un sous-ensemble $X' \subseteq X$ est membre d'un ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet, pour $\ell \geq 3$.*

Preuve. La preuve est identique à la preuve du théorème 15, basée sur une réduction à partir du 2-comité vainqueur possible. □

En résumé, avec ou sans contrainte sur le nombre de candidats approuvés, il existe une caractérisation simple des candidats vainqueurs possibles et nécessaires. Cependant, le problème de déterminer si un sous-ensemble de candidats de taille supérieure ou égale à 2 est membre d'un ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet.

5.4.2 Autres règles de vote par approbation

Dans cette section, nous étudierons le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour les autres règles de vote par approbation à vainqueurs multiples définies en section 2.3.4.

Commençons par mentionner le fait que si, pour une règle donnée, le problème de détermination d'un comité vainqueur de taille quelconque est NP-difficile alors le problème du comité vainqueur possible (sans contrainte sur la taille) est aussi NP-difficile. En effet, le problème de vainqueur possible est un problème au moins aussi difficile que le problème de détermination du vainqueur. Ainsi, puisque nous savons qu'il est difficile de déterminer un comité vainqueur de taille quelconque pour les règles minimax, AV_w, l'approbation proportionnelle et pour les procédures d'approbation à seuils, nous savons que le problème du comité vainqueur possible est NP-difficile pour ces règles.

Cependant, lorsque la taille du comité est fixée à une constante ℓ, le problème du calcul du ℓ-comité vainqueur s'effectue en temps polynomial pour toutes ces règles de vote par approbation. En effet, il existe un nombre polynomial de comités de taille ℓ, à savoir $\binom{n}{\ell}$. Nous ne savons donc rien sur la complexité du problème du ℓ-comité vainqueur possible pour ces règles.

Nous allons alors étudier le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour une partie des règles présentées en section 2.3.4, et montrer à chaque fois que ce problème est NP-complet.

5.4.2.a Approbation nette

L'approbation nette est une règle de vote proche de l'approbation simple, dont le but est de corriger la tendance de l'approbation simple à élire des comités de grande taille. Pour l'approbation nette, le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet.

Théorème 18. *Pour l'approbation nette, le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet, pour $\ell \geq 2$.*

Preuve. Étant donnés un profil d'approbations A et un entier ℓ, étudions le score d'approbation nette d'un comité S, noté $NAV(S)$.

$$\begin{aligned} NAV(S) &= \sum_{i \in N} |v_i \cap S| - |v_i^c \cap S| \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in S} |v_i \cap j| - |v_i^c \cap j| \end{aligned}$$

Or, pour tout $j \in X$, nous avons $|v_i^c \cap j| = 1 - |v_i \cap j|$. Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} NAV(S) &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in S} 2 \cdot |v_i \cap j| - 1 \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in S} 2 \cdot |v_i \cap j| - \sum_{i \in N} \sum_{j \in S} 1 \\ &= 2 \cdot \sum_{i \in N} \sum_{j \in S} |v_i \cap j| - n \cdot |S| \end{aligned}$$

Par définition, ceci équivaut à :

$$NAV(S) = AV(S) - n \cdot |S|$$

Ainsi, le terme $n \cdot |S|$, qui pénalise les comités de grande taille, est le même pour tout comité de taille ℓ. Nous concluons alors que $\ell - NAV(A) = \ell - AV(A)$, c'est-à-dire que l'ensemble des ℓ-comités vainqueurs pour l'approbation simple dans A est le même que pour l'approbation nette dans A'. $\square$

5.4.2.b Satisfaction

L'approbation par satisfaction est une règle dont le score pour un comité est calculé en prenant de la satisfaction de chaque votant. De même, le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour cette règle est NP-complet.

Théorème 19. *Pour l'approbation par satisfaction, le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet, pour $\ell \geq 2$.*

Preuve. La preuve est une réduction depuis le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour la règle par approbation simple. Une instance du ℓ-comité vainqueur possible pour l'approbation simple est définie par un ensemble de votants N, un ensemble de candidats X, un profil A, et un sous-ensemble de candidats S de taille ℓ. L'objectif est de déterminer si il existe un vecteur $(k_i)_{i\in N}$ tel que si chaque votant i approuve ses k_i meilleurs candidats alors S est le comité vainqueur. Ce problème est montré NP-complet dans le théorème 15. Soit $I = (A, N, X, S)$ une instance du ℓ-comité vainqueur possible pour la règle par approbation simple. À partir de I, nous construisons une instance $I' = (A', N', X', S')$ du ℓ-comité vainqueur possible pour l'approbation par satisfaction en posant $X' = X$ et $S' = S$. Le profil d'approbations A' est construit de la manière suivante : pour tout $i \in N$, pour tout $j \in X$, si $j \in v_i$ alors nous créons un votant k qui approuve uniquement le candidat j : $v_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, où l'unique 1 est en position j.

Ainsi, le profil A' est composé de $\sum_{j\in X} App(j)$ votes, dans lesquels un unique candidat est approuvé. Montrons alors que le sous-ensemble S est un comité vainqueur possible pour l'approbation simple dans A si et seulement si S' est un comité vainqueur possible pour l'approbation par satisfaction dans A'.

Étudions le score de satisfaction de S dans A', noté $SAV_{A'}(S)$. Par définition, nous avons :

$$SAV_{A'}(S) = \sum_{i\in N'} \frac{|v'_i \cap S|}{|v'_i|}$$

Or, pour tout $i \in N'$, nous avons $|v'_i| = 1$. Ainsi, nous obtenons :

$$SAV_{A'}(S) = \sum_{i\in N'} |v'_i \cap S|$$

Cette équation équivaut à :

$$SAV_{A'}(S) = \sum_{j\in S} \sum_{i\in N'} |v'_i \cap j|$$

De plus, par construction de l'instance I', nous savons que pour tout $j \in X$, il existe le même nombre de votant $i \in N'$ tel que $|v'_i \cap j| = 1$ que de votant $i \in N$ tel que $|v_i \cap j| = 1$. Nous obtenons donc :

$$SAV_{A'}(S) = \sum_{j\in S} \sum_{i\in N} |v_i \cap j|$$

Ceci est équivalent à :

$$SAV_{A'}(S) = \sum_{i\in N} |v_i \cap S|$$

Par définition, ceci équivaut à :

$$SAV_{A'}(S) = AV_A(S)$$

Puisque cette égalité est vraie pour tout comité, nous concluons donc que le comité S est vainqueur possible pour l'approbation simple dans A si et seulement si S est un comité vainqueur possible pour l'approbation par satisfaction dans A'. □

5.4.2.c Satisfaction nette

De façon similaire à l'approbation nette, la satisfaction nette est une règle proche de la satisfaction, qui permet d'éliminer la tendance de la satisfaction à élire des comités de grande taille. Le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour cette règle est aussi NP-complet.

Théorème 20. *Pour l'approbation par satisfaction nette, le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet, pour $\ell \geq 2$.*

Preuve. La preuve est une réduction depuis le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour la règle par approbation simple. Cette réduction est la même que dans la preuve du théorème 19.

Une instance du ℓ-comité vainqueur possible pour l'approbation simple est définie par un ensemble de votants N, un ensemble de candidats X, un profil A, et un sous-ensemble de candidats S de taille ℓ. L'objectif est de déterminer si il existe un vecteur $(k_i)_{i \in N}$ tel que si chaque votant i approuve ses k_i meilleurs candidats alors S est le comité vainqueur. Ce problème est montré NP-complet dans le théorème 15.
Soit $I = (A, N, X, S)$ une instance du ℓ-comité vainqueur possible pour la règle par approbation simple. À partir de I, nous construisons une instance $I' = (A', N', X', S')$ du ℓ-comité vainqueur possible pour l'approbation par satisfaction nette en posant $X' = X$ et $S' = S$. Le profil d'approbations A' est construit de la manière suivante : pour tout $i \in N$, pour tout $j \in X$, si $j \in v_i$ alors nous créons un votant k qui approuve uniquement le candidat j : $v_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, où l'unique 1 est en position j.

Ainsi, le profil A' est composé de $\sum_{j \in X} App(j)$ votes, dans lesquels un unique candidat est approuvé. Montrons alors que le sous-ensemble S est un comité vainqueur possible pour l'approbation simple dans A si et seulement si S' est un comité vainqueur possible pour l'approbation par satisfaction nette dans A'.

Étudions le score de satisfaction nette de S dans A', noté $NSAV_{A'}(S)$. Par définition, nous avons

$$NSAV_{A'}(S) = \sum_{i \in N'} \frac{|v_i' \cap S|}{|v_i'|} - \frac{|v_i'^c \cap S|}{|v_i'^c|}.$$

Or, pour tout $i \in N'$, nous avons $|v_i'| = 1$ et $|v_i'^c| = m - 1$. Ainsi, nous obtenons :

$$NSAV_{A'}(S) = \sum_{i \in N'} |v_i' \cap S| - \frac{|v_i'^c \cap S|}{m - 1}$$

Cette équation équivaut à :

$$SAV_{A'}(S) = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{j \in S} \sum_{i \in N'} (m-1) \cdot |v'_i \cap j| - |v'^c_i \cap j|$$

Comme, pour tout $j \in X$, nous avons que $|v'^c_i \cap j| = 1 - |v'_i \cap j|$, nous obtenons :

$$SAV_{A'}(S) = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{j \in S} \sum_{i \in N'} (m-1) \cdot |v'_i \cap j| - (1 - |v'_i \cap j|)$$

Ceci équivaut à :

$$SAV_{A'}(S) = \frac{m}{m-1} \cdot \sum_{j \in S} \sum_{i \in N'} |v'_i \cap j| - 1$$

De plus, par construction de l'instance I', nous savons que pour tout $j \in X$, il existe le même nombre de votant $i \in N'$ tel que $|v'_i \cap j| = 1$ que de votant $i \in N$ tel que $|v_i \cap j| = 1$. Nous obtenons donc :

$$SAV_{A'}(S) = \frac{m}{m-1} \cdot \sum_{j \in S} \sum_{i \in N} |v_i \cap j| - 1$$

Ceci est équivalent à :

$$SAV_{A'}(S) = \frac{m}{m-1} \cdot \sum_{j \in S} \sum_{i \in N} |v_i \cap j| - n \cdot |S|$$

Par définition, nous obtenons :

$$SAV_{A'}(S) = \frac{m}{m-1} \cdot AV_A(S) - n \cdot |S|$$

Ainsi, le terme $n \cdot |S|$, qui pénalise les comités de grande taille, est le même pour tout comité de taille ℓ. Nous concluons alors que $\ell - NSAV(A') = \ell - SAV(A)$, c'est-à-dire que l'ensemble des ℓ-comités vainqueurs est le même pour l'approbation par satisfaction dans A et l'approbation par satisfaction nette dans A'. □

5.4.2.d Approbation proportionnelle

Le but du vote par approbation proportionnelle est de répondre au besoin de proportionnalité, qui n'est pas pris en compte par les méthodes précédentes. De même, le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour cette règle est NP-complet.

Théorème 21. *Pour l'approbation proportionnelle, le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet, pour $\ell \geq 2$.*

Preuve. La preuve est une réduction depuis le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour la règle par approbation simple, similaire à celle du théorème 19.

Une instance du ℓ-comité vainqueur possible pour l'approbation simple est définie par un ensemble de votants N, un ensemble de candidats X, un profil A, et un sous-ensemble de candidats S de taille ℓ. L'objectif est de déterminer si il existe un vecteur $(k_i)_{i\in N}$ tel que si chaque votant i approuve ses k_i meilleurs candidats alors le comité vainqueur est S. Ce problème est montré NP-complet dans le théorème 15.
Soit $I = (A, N, X, S)$ une instance du ℓ-comité vainqueur possible pour la règle par approbation simple. À partir de I, nous construisons une instance $I' = (A', N', X', S')$ du ℓ-comité vainqueur possible pour l'approbation proportionnelle en posant $X' = X$ et $S' = S$. Le profil d'approbations A' est construit de la manière suivante : pour tout $i \in N$, pour tout $j \in X$, si $j \in v_i$ alors nous créons un votant k qui approuve uniquement le candidat j : $v_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, où l'unique 1 est en position j.

Ainsi, le profil A' est composé de $\sum_{j\in X} App(j)$ votes, dans lesquels un unique candidat est approuvé. Montrons alors que le sous-ensemble S est un comité vainqueur possible pour l'approbation simple dans A si et seulement si S' est un comité vainqueur possible pour l'approbation proportionnelle dans A'.

Étudions le score d'approbation proportionnelle de S dans A', noté $SAV_{A'}(S)$. Par définition :

$$PAV_{A'}(S) = \sum_{i\in N'} r(|v'_i \cap S|)$$

Or, pour tout $i \in N'$, nous avons $|v'_i| = 1$. Ainsi, nous obtenons :

$$PAV_{A'}(S) = \sum_{i\in N'} |v'_i \cap S|$$

Cette équation équivaut à :

$$PAV_{A'}(S) = \sum_{j\in S}\sum_{i\in N'} |v'_i \cap j|$$

De plus, par construction de l'instance I', nous savons que pour tout $j \in X$, il existe le même nombre de votant $i \in N'$ tel que $|v'_i \cap j| = 1$ que de votant $i \in N$ tel que $|v_i \cap j| = 1$. Nous obtenons donc :

$$PAV_{A'}(S) = \sum_{j\in S}\sum_{i\in N} |v_i \cap j|$$

Ceci qui équivaut à :

$$PAV_{A'}(S) = \sum_{i\in A} |v_i \cap S|$$

Par définition, nous obtenons :

$$PAV_{A'}(S) = AV_A(S)$$

Puisque cette égalité est vraie pour tout comité, nous concluons donc que le comité S est vainqueur possible pour l'approbation simple dans A si et seulement si S est un comité vainqueur possible pour l'approbation proportionnelle dans A'. $\square$

5.4.2.e Approbation proportionnelle séquentielle

L'approbation proportionnelle séquentielle est une règle similaire à l'approbation proportionnelle mais dans laquelle les candidats sont élus de façon séquentielle. De même, le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour cette règle est NP-complet.

Théorème 22. *Pour l'approbation proportionnelle séquentielle, le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet, pour $\ell \geq 2$.*

Preuve. La preuve est une réduction depuis le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour la règle par approbation simple, similaire à celle du théorème 19.

Une instance du ℓ-comité vainqueur possible pour l'approbation simple est définie par un ensemble de votants N, un ensemble de candidats X, un profil A, et un sous-ensemble de candidats S de taille ℓ. L'objectif est de déterminer si il existe un vecteur $(k_i)_{i \in N}$ tel que si chaque votant i approuve ses k_i meilleurs candidats alors le comité vainqueur est S. Ce problème est montré NP-complet dans le théorème 15.
Soit $I = (A, N, X, S)$ une instance du ℓ-comité vainqueur possible pour la règle par approbation simple. À partir de I, nous construisons une instance $I' = (A', N', X', S')$ du ℓ-comité vainqueur possible pour l'approbation proportionnelle séquentielle en posant $X' = X$ et $S' = S$. Le profil d'approbations A' est construit de la manière suivante : pour tout $i \in N$, pour tout $j \in X$, si $j \in v_i$ alors nous créons un votant k qui approuve uniquement le candidat j : $v_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, où l'unique 1 est en position j.

Ainsi, le profil A' est composé de $\sum_{j \in X} App(j)$ votes, dans lesquels un unique candidat est approuvé. Montrons alors que le sous-ensemble S est un comité vainqueur possible pour l'approbation simple dans A si et seulement si S' est un comité vainqueur possible pour l'approbation proportionnelle séquentielle dans A'.

En effet, puisque pour tout $i \in N'$, nous avons $|v'_i| = 1$, le comité vainqueur $\ell - SPAV(A')$ est composé des ℓ-candidats les plus approuvés dans A'. De plus, par construction de l'instance I', nous savons que pour tout $j \in X$, il existe le même nombre de votant $i \in N'$ tel que $|v'_i \cap j| = 1$ que de votant $i \in N$ tel que $|v_i \cap j| = 1$. Ainsi, les ℓ-candidats les plus approuvés dans A' sont les mêmes ℓ-candidats le plus approuvés dans A. Nous obtenons donc :

$$\ell - SPAV(A') = \ell - AV(A)$$

□

5.4.2.f Approbation à seuil

Dans les procédures d'approbation à seuil, on considère qu'un comité représente un votant i si il contient assez de candidats approuvés par i, sinon il ne le représente pas. Le comité vainqueur est celui qui représente le plus de votants.

Dans un premier temps, nous étudions les procédures d'approbation à seuil constant, en commençant par la procédure avec un seuil de valeur 1, c'est-à-dire que pour tout comité S, $t(S) = 1$. Pour cette procédure, que l'on notera $\ell - T^1AV$, le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet.

Théorème 23. *Pour l'approbation à seuil constant de valeur 1, le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet, pour $\ell \geq 2$.*

Preuve. La preuve est une réduction depuis le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour la règle par approbation simple, similaire à celle du théorème 19.

Une instance du ℓ-comité vainqueur possible pour l'approbation simple est définie par un ensemble de votants N, un ensemble de candidats X, un profil A, et un sous-ensemble de candidats S de taille ℓ. L'objectif est de déterminer si il existe un vecteur $(k_i)_{i\in N}$ tel que si chaque votant i approuve ses k_i meilleurs candidats alors le comité vainqueur est S. Ce problème est montré NP-complet dans le théorème 15.
Soit $I = (A, N, X, S)$ une instance du ℓ-comité vainqueur possible pour la règle par approbation simple. À partir de I, nous construisons une instance $I' = (A', N', X', S')$ du ℓ-comité vainqueur possible pour l'approbation à seuil constant de valeur 1 en posant $X' = X$ et $S' = S$. Le profil d'approbations A' est construit de la manière suivante : pour tout $i \in N$, pour tout $j \in X$, si $j \in v_i$ alors nous créons un votant k qui approuve uniquement le candidat j : $v_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, où l'unique 1 est en position j.

Ainsi, le profil A' est composé de $\sum_{j\in X} App(j)$ votes, dans lesquels un unique candidat est approuvé. Montrons alors que le sous-ensemble S est un comité vainqueur possible pour l'approbation simple dans A si et seulement si S' est un comité vainqueur possible pour l'approbation à seuil constant de valeur 1 dans A'.

En effet, puisque pour tout $i \in N'$, nous avons $|v'_i| = 1$, le comité vainqueur $\ell - T^1AV(A')$ est composé des ℓ-candidats les plus approuvés dans A'. De plus, par construction de l'instance I', nous savons que pour tout $j \in X$, il existe le même nombre de votant $i \in N'$ tel que $|v'_i \cap j| = 1$ que de votant $i \in N$ tel que $|v_i \cap j| = 1$. Ainsi, les ℓ-candidats le plus approuvés dans A' sont les mêmes ℓ-candidats les plus approuvés dans A. Nous obtenons donc :

$$\ell - T^1AV(A') = \ell - AV(A)$$

□

Maintenant, intéressons-nous aux règles à seuil constant de valeur quelconque k, que l'on notera $\ell - T^kAV$, pour montrer que le problème du ℓ-comité vainqueur possible est aussi NP-complet dans ce cas.

Théorème 24. *Pour l'approbation à seuil constant k, le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet, pour $\ell \geq 2$.*

Preuve. La preuve est une réduction depuis le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour la règle d'approbation à seuil constant de valeur 1.

Une instance du ℓ-comité vainqueur possible pour l'approbation à seuil constant de valeur 1 est définie par un ensemble de votants N, un ensemble de candidats X, un profil A, et un sous-ensemble de candidats S de taille ℓ. L'objectif est de déterminer si il existe un vecteur $(k_i)_{i \in N}$ tel que si chaque votant i approuve ses k_i meilleurs candidats alors le comité vainqueur est S. Ce problème est montré NP-complet dans le théorème 23.
Soit $I = (A, N, X, S)$ une instance du ℓ-comité vainqueur possible pour l'approbation à seuil constant de valeur 1. À partir de I, nous construisons $I' = (A', N', X', S')$, une instance du ℓ-comité vainqueur possible pour l'approbation à seuil constant k de la manière suivante :

- $X' = X \cup \{d_1, \ldots, d_{k-1}\}$
- $S' = S \cup \{d_1, \ldots, d_{k-1}\}$
- A' : pour tout $i \in N$, $A'_i = A_i \cup \{d_1, \ldots, d_{k-1}\}$.

Cela signifie que l'on ajoute $k - 1$ candidats artificiels dans A' qui sont approuvés par l'ensemble des votants. Montrons alors qu'un sous-ensemble S est un comité vainqueur possible pour l'approbation à seuil constant de valeur 1 dans A si et seulement si S' est un comité vainqueur possible pour l'approbation à seuil constant k dans A'.

Pour tout comité C de A' tel que $\{d_1, \ldots, d_{k-1}\} \subseteq C$, on a

$$|\{i \in A' : |v'_i \cap C| \geq k|\}| = |\{i \in A : |v_i \cap (C \setminus \{d_1, \ldots, d_{k-1}\})| \geq 1|\}|$$

car les candidats artificiels sont approuvés par tous les votants. Cette relation signifie que le nombre de votants représentés par C dans A' avec un seuil égal à k est égal au nombre de votants représentés par $(C \setminus \{d_1, \ldots, d_{k-1}\})$ dans A avec un seuil égal à 1. Et puisque cette relation est vraie pour tout comité C, on obtient donc :

$$\ell - T^k AV(A') = \ell - AV(A)$$

□

Finalement, intéressons-nous aux règles à seuils variables et en particulier à la règle à seuil majoritaire, afin de montrer que le problème du ℓ-comité vainqueur possible est aussi NP-complet dans ce cas.

Théorème 25. *Pour l'approbation à seuil majoritaire, le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet, pour $\ell \geq 2$.*

Preuve. Pour montrer ce résultat, il suffit de remarquer que lorsque l'on étudie le problème du ℓ-comité vainqueur possible, on ne s'intéresse qu'aux comités de taille fixée ℓ. Ainsi, pour l'approbation à seuil majoritaire, ces comités possèdent le même seuil égal à $\ell/2$. Donc, étant donné un profil d'approbations, le comité de taille ℓ vainqueur pour l'approbation à seuil majoritaire est égal au comité de taille ℓ vainqueur pour l'approbation à seuil constant $\ell/2$. □

Pour résumé, sans contrainte sur le nombre d'approbations, déterminer si un sous-ensemble de candidats de taille supérieure ou égale à 2 est un ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet, pour l'approbation nette, l'approbation par satisfaction, l'approbation par satisfaction nette, l'approbation proportionnelle, l'approbation proportionnelle séquentielle, l'approbation à seuil constant et enfin l'approbation à seuil majoritaire.

5.4.3 Résumé

Cette section porte sur l'étude des problèmes de vainqueurs possibles et nécessaires dans le contexte du vote par approbation à vainqueur multiples.

Tout d'abord nous étudions ces problèmes pour l'approbation simple. Nous montrons que le problème du ℓ-comité vainqueur possible est NP-complet, pour $\ell \geq 2$. Puis nous donnons une caractérisation simple des candidats membres d'un ℓ-comité vainqueur possible ou de tous les ℓ-comités vainqueurs possibles.

Ensuite, nous étudions le problème du ℓ-comité vainqueur possible pour une partie des règles présentées en section 2.3.4, en particulier les règles à scores et à seuils. Nous montrons que pour chacune de ces règles ce problème est NP-complet.

Chapitre 6
Conclusion et perspectives

6.1 Conclusion

Je me suis intéressé dans cette thèse à la problématique de la décision collective. Il s'agit de prendre une décision commune parmi un ensemble d'alternatives en se fondant sur les préférences d'un ensemble d'agents. Il existe de nombreuses méthodes pour agréger des préférences en vue d'une décision commune. La méthode que nous avons étudiée ici est celle du vote. Dans le cadre du vote, les votants expriment leurs préférences sur les candidats (ou alternatives) à l'aide de bulletins de vote qui peuvent prendre différents formes.

L'objectif est de déterminer le candidat (ou le sous-ensemble de candidats) qui est le meilleur compromis étant données les préférences des votants.

Dans le premier chapitre de cette thèse nous avons étudié le vote par approbation dans le cadre d'élection à vainqueurs multiples. Le vote par approbation est un système où chaque votant approuve autant de candidats qu'il souhaite. Ce système est fréquemment utilisé en pratique, par exemple pour élire un comité dans une université ou une entreprise. Une fois les préférences dichotomiques des votants exprimées, il existe de nombreuses règles pour les agréger en un choix commun. Deux règles de vote ont été particulièrement étudiées, la règle habituelle, appelée *minisum*, et la règle *minimax*.
Nous avons généralisé ces deux règles en un ensemble continu de règles de vote, par l'utilisation de l'opérateur de moyenne ordonnée pondérée (*ordered weighted averaging*, OWA). Cette famille de règles est paramétrée par un vecteur de poids et permet de définir des règles de vote entre minisum et minimax. Pour des raisons d'équité, nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux vecteurs de poids binaires et décroissants. Nous avons alors étudié cette famille de règles du point de vue de la complexité de calcul, de la manipulation et du nombre moyen de comités vainqueurs ex aequo.
En étudiant la complexité du calcul de ces règles, nous avons déterminé que le calcul d'un comité vainqueur est NP-difficile, même pour des vecteurs de poids binaires et décrois-

sants. De plus, certaines propriétés concernant les candidats nécessairement vainqueurs [1] (ou perdants) ont été mises en évidence. Par exemple, si un candidat est approuvé par un nombre de votants supérieur à un certain seuil [2], alors il appartient à tous les comités vainqueurs. En résumé, minisum est la seule règle à vecteur de poids binaire et décroissant dont le calcul d'un comité vainqueur est polynomial.
Concernant la manipulation, nous avons montré que cette famille de règle est manipulable lorsque les vecteurs de poids sont monotones. Plus précisément, nous avons démontré que minisum est la seule règle de vote avec un vecteur de poids monotone, à être résistante à la manipulation.
Enfin, pour étudier le nombre de moyen de comités vainqueurs ex aequo, nous avons conduit une étude expérimentale. Sous l'hypothèse de culture impartiale (distribution uniforme des votes), nous avons généré un ensemble de profils d'approbations. Pour chacun de ces profils, j'ai calculé le nombre de comités vainqueurs en fonction de la règle étudiée. Il ressort de cette étude que minimax est bien la règle qui possède le plus de comités vainqueurs en moyenne. La règle minimax donne donc un poids plus important au mécanisme de départage des ex aequo que les autres règles considérées. La règle minisum se comporte de deux manières différentes en fonction de la parité du nombre de votants. Si ce nombre est pair, minisum possède plus comités vainqueurs ex aequo que les règles fondées sur les OWA (excepté minimax), sinon elle ne possède qu'un unique comité vainqueur. Ainsi, les règles fondées sur les OWA retournent en moyenne un nombre de comités vainqueurs ex aequo plus faible que minimax et minisum, ce qui permet de donner moins de poids au mécanisme de départage des ex aequo.
Finalement, il est intéressant de noter que le comportement de ces règles est significativement différent selon que le nombre de votants est pair ou impair. En effet, la règle $AV_{w(1)}$, définie en section 3.3.2.a, est facile à calculer si le nombre de votants est impair, alors qu'elle est difficile dans le cas où ce nombre est pair. De même, l'étude de la manipulation a dû être décomposée en deux cas, en fonction de cette parité. Le cas où le nombre de votants est pair conduit à des exemples de manipulation faible, tandis que le cas où le nombre de votants est impair conduit à des exemples de manipulation forte. Enfin, dans l'étude expérimentale du nombre de comités vainqueurs ex aequo, la parité du nombre de votants influe particulièrement sur le comportement de minisum.

Pour conclure, les résultats de ce chapitre paraissent favorables à l'utilisation de la règle minisum, car elle est facile à calculer, résistante à la manipulation et possède relativement peu de comités ex aequo en moyenne. Mais cette règle est basée sur le critère majoritaire, ce qui n'est pas adapté à l'élection de comités. En effet, cela signifie qu'elle ne prend pas en compte le critère d'équité lors du calcul du comité vainqueur. Cependant, les règles de vote fondées sur les OWA, qui sont plus équitables, sont difficiles à calculer et manipulables. Le phénomène de compensation entre équité et effort algorithmique est récurrent en choix social. Ainsi, ces résultats ne sont pas à interpréter comme des arguments en faveur de minisum, mais plutôt comme un rappel que prendre en compte l'équité dans un processus d'agrégation de préférences ne s'effectue pas sans coût. Les règles proches de minisum

1. C'est-à-dire les candidats qui sont membres de tout comité vainqueur.
2. Ce seuil est $(n + i + 1)/2$, où n et i sont des données de l'élection et du vecteur de poids considéré.

paraissent particulièrement attractives. Elles permettent de prendre en compte à un niveau raisonnable l'équité de la solution renvoyée, tout en étant moins manipulables que minimax.

Le second chapitre de cette thèse est consacré au vote par approbation sur des domaines combinatoires. La structure combinatoire du domaine de vote engendre des problèmes algorithmique importants. Par exemple, si les préférences des votants sont explicitées sous forme d'ordres de préférences, cela conduit à un nombre exponentiel d'alternatives à comparer et à ordonner. De nombreuses méthodes on été proposées pour effectuer le compromis entre qualité de la solution et coût de calcul et de communication. Une vue d'ensemble de ces méthodes est disponible dans Lang et Xia (2016). Dans cette thèse, nous avons étudié l'extension de ces méthodes au vote par approbation.
Nous avons présenté quatre méthodes de vote par approbation sur des domaines combinatoires : l'approbation directe fondée sur une représentation compacte des préférences, l'approbation séquentielle, la règle minisum conditionnelle et la règle minimax conditionnelle fondées sur des préférences conditionnelles.
Tout d'abord, nous avons étudié brièvement l'approbation directe fondée sur une représentation compacte des préférences, présentée en section 4.2. Nous avons montré qu'il est difficile de calculer un vainqueur pour cette règle. De plus, le vote sous forme de représentation compacte peut être difficile à exprimer pour les votants car il peut être de taille exponentielle.
Les trois autres méthodes proposées se fondent sur une forme d'approbation conditionnelle des préférences, présentée en section 4.2.2. Ces méthodes ont été étudiées sous quatre aspects, à savoir la complexité de calcul, la proximité de leurs solutions, leurs propriétés axiomatiques et leur manipulabilité.
Sur la complexité de calcul, nous savons déjà que minimax est une règle difficile à calculer, cela implique que minimax conditionnelle est aussi difficile. Cependant, la règle minisum se calcule en temps polynomial, ce qui ne nous apprend rien sur la complexité de minisum conditionnelle. Nous montrons en fait que minisum conditionnelle est difficile à calculer. De plus, nous montrons qu'il existe une réduction depuis minisum conditionnelle vers le problème de satisfaction maximal, ce qui nous permet d'une part d'utiliser les solveurs existants pour MAX SAT et d'autre part d'obtenir un ratio d'approximation différentielle pour minisum conditionnelle.
La comparaison de ces règles nous a permis de conclure qu'il existe des profils pour lesquels ces méthodes renvoient des solutions totalement opposées[3]. De plus, nous avons mesuré la proximité de ces règles. Par exemple, lorsque tous les domaines sont de taille α, le ratio maximal entre les scores minisum d'une solution vainqueur pour le vote par approbation séquentiel et d'une solution vainqueur pour minisum conditionnelle tend vers p.
Puis nous avons étudié les aspects axiomatiques de ces règles, en particulier les deux règles minisum conditionnelle et minimax conditionnelle. Ces deux règles ne se comportent pas de la même façon, à cause de l'utilisation de l'opérateur non linéaire maximum dans la

3. Ceci est vrai pour tout nombre de votants, pour tout nombre de variables et pour toute taille de ces variables.

seconde règle. Par exemple, nous avons démontré que ces deux règles vérifient la consistance lorsqu'elle sont considérées comme des règles déterministes mais que, dans le cas non-déterministe, seule minisum conditionnelle est fortement consistante.
Enfin, nous nous sommes intéressés à la manipulation de ces trois règles, en les considérant comme des règles déterministes, c'est-à-dire en leur adjoignant un mécanisme de départage des ex aequo. Nous avons alors montré que pour tout nombre de variables et toute taille de ces variables, les trois règles considérées sont manipulables.

En conclusion de cette partie, il apparaît que le vote par approbation directe est un système difficile à mettre en œuvre, à cause d'une part de la forme des préférences, qui demande un effort cognitif élevé de la part des votants, et d'autre part de la difficulté de calcul de cette règle. Parmi les trois autres règles, le choix à privilégier dépend essentiellement du contexte considéré. La règle de vote par approbation séquentielle est très efficace dans les situations où la communication est limitée. Cependant elle ne prend pas en compte le critère d'équité. La règle minisum conditionnelle n'intègre pas non plus la notion d'équité de la solution. Enfin, la règle minimax conditionnelle est adaptée lorsque l'équité est un critère important. Finalement, ces résultats permettent de choisir la règle la mieux adaptée en fonction du contexte de décisions et des critères à satisfaire, en particulier du critère d'équité.

Finalement, dans le troisième chapitre, je me suis intéressé à la situation où les informations sur les préférences sont incomplètes. Lorsque les préférences sont incomplètes, plusieurs questions peuvent se poser. Par exemple, existe-t-il un candidat qui soit certain d'être vainqueur lorsque les préférences seront complétées (vainqueur nécessaire), ou encore, étant donné un candidat, a-t-il une chance d'être vainqueur lorsque les préférences seront complétées (vainqueur possible). Ces problèmes sont présentés en section 2.6.
Dans le cadre de ce chapitre, nous avons fait l'hypothèse que les ordres de préférence des votants nous sont donnés mais que l'on ignore la manière dont les votants transforment ces ordres en bulletins d'approbation. En effet, étant données les préférences d'un votant sur un ensemble de candidats, il est connu qu'il existe plusieurs votes d'approbation sincères et compatibles, comme je l'ai rappelé en section 2.5.1.a. Alors, étant données ces préférences partielles, nous avons étudié les problèmes de vainqueurs possibles et nécessaires pour le vote par approbation à vainqueur unique et à vainqueurs multiples.
Pour le vote par approbation à vainqueur unique sans contrainte sur le nombre de candidats à approuver, nous avons montré que déterminer si un candidat est un vainqueur possible unique est facile. Cependant, déterminer si un sous-ensemble de candidats (de taille supérieure à 2) est un ensemble de candidats vainqueurs ex aequo est difficile. Ces deux questions ont été étudiées dans le cas où il existe un nombre minimal et un nombre maximal de candidats à approuver, avec des résultats similaires.
De plus, nous avons effectué une étude expérimentale afin d'observer deux aspects de cette situation : la résistance de la règle au choix du vote et la proximité entre le vainqueur de Borda et le candidat ayant la plus grande probabilité de gagner. En se basant sur une distribution uniforme des votants dans un premier temps, puis sur le modèle de Mallows dans

un second temps, nous avons généré différents profils d'approbations compatibles avec le même profil d'ordres de préférences. Cela nous a permis d'estimer la probabilité de gagner de chaque candidat. Par exemple, nous observons que la plus grande probabilité de gagner varie entre 0,1 et 0,5 avec l'hypothèse de distribution uniforme des votants. Cela nous a aussi permis de comparer le candidat avec la plus grande probabilité de gagner avec le vainqueur de Borda. On observe qu'avec la distribution uniforme, le candidat avec la plus grande probabilité de gagner est le vainqueur de Borda dans plus de 75% des profils tirés. Ces résultats sont renforcés lorsque l'on étudie le modèle de Mallows.
Enfin, nous avons étendu ces questions aux votes par approbation à vainqueurs multiples. Pour chacune des règles présentées en section 2.3.4, nous avons montré que le problème de comité vainqueur possible est difficile, que l'on ait une contrainte sur la taille du comité à élire ou non. De plus, dans ce contexte, nous avons étudié deux problèmes supplémentaires : un candidat donné fait-il partie d'un comité vainqueur possible et fait-il partie de tous les comités vainqueurs possibles. Nous avons montré que ces deux problèmes sont faciles à résoudre.

Pour conclure, il apparaît que, dans le cas du vote par approbation à vainqueur unique, il est possible d'obtenir facilement des informations utiles lorsque les préférences sont incomplètes. En effet, étant donné un candidat, il est facile de déterminer si ce candidat est susceptible d'être vainqueur au terme de l'élection, ou encore, si ce candidat est certain d'être vainqueur, ce qui a comme avantage de diminuer la quantité de communication. Cependant, les expérimentations effectuées sur la résistance de la règle au choix du vote nous montrent qu'en moyenne la probabilité la plus forte d'être un candidat vainqueur n'est pas très élevée (entre 0,1 et 0,5), sous l'hypothèse de la culture impartiale. Ceci nous montre que, dans la plupart des profils d'ordres tirés uniformément, il n'existe pas de vainqueur nécessaire. Enfin, lorsque l'on considère le vote à vainqueurs multiples, les informations que l'on peut déduire des préférences incomplètes sont moins significatives. Étant donné un candidat, on pourra savoir si ce candidat fait partie d'un comité qui a une chance d'être vainqueur à l'issue du vote. Cependant, il est difficile de savoir si un comité donné peut être vainqueur.

6.2 Perspectives

Au cours de cette thèse nous avons étudié certains aspects algorithmiques du vote par approbation, dans le cadre d'élection à vainqueur unique (chapitre 5) mais essentiellement dans le cadre d'élections à vainqueurs multiples (chapitres 3, 4, 5). De nombreuses perspectives de recherche se dégagent de ce travail.

Tout d'abord, dans le cadre des élections de comités par approbation, des perspectives de recherche à court terme se dégagent. En effet, il serait intéressant d'étendre les résultats obtenus à l'ensemble des règles fondées sur les OWA. En terme de complexité algorithmique, cela signifie déterminer la complexité de calcul de l'ensemble de ces règles. Le résultat principal de ce chapitre énonce que les règles les plus simples (à vecteurs binaires et décroissants) de cet ensemble sont difficiles à calculer, il s'agirait donc de montrer que pour l'ensemble de ces règles le calcul demeure difficile. Du point de vue de la manipulation, nous avons montré que la règle minisum est la seule règle paramétrée par un vecteur monotone à être résistante à la manipulation. Ainsi, il serait intéressant de savoir si minisum reste la seule règle résistante à la manipulation parmi l'ensemble des règles étudiées.

Ce chapitre nous permet aussi d'entrevoir des perspectives de recherche à plus long terme. Nous avons mis en évidence les différences de comportement des règles fondées sur les OWA en fonction de la parité du nombre de votants, que ce soit lors du calcul d'un comité vainqueur, lors de l'étude de la manipulation ou encore lors des expérimentations sur le nombre de comités vainqueurs ex aequo. Ce comportement nous rappelle le comportement du vote majoritaire, pour lequel la parité du nombre de votants joue un rôle particulier. L'étude du lien entre ces règles et le vote majoritaire paraît donc nécessaire pour mieux comprendre ce comportement et déterminer son influence sur le résultat des règles.
D'autre part, le vote par approbation peut être généralisé en considérant le vote par approbation contraint, c'est-à-dire un vote par approbation dans lequel il existe des contraintes supplémentaires. Ces contraintes peuvent être variées, par exemple il peut exister un nombre maximal (minimal) de candidats à approuver par votant, ou encore un respect de la parité homme-femme dans le comité élu. Il serait alors intéressant de déterminer comment nos résultats se généralisent lorsqu'il existe ce type de contraintes.
Enfin, il existe d'autres méthodes pour prendre en compte l'équité dans les élections à vainqueurs multiples. En particulier, le système de représentation proportionnelle par liste a pour objectif principal la représentation proportionnelle de l'électorat. Dans ce système, les votants expriment leurs préférences sur des listes de candidats (et non sur des candidats seuls). En pratique, de nombreuses variantes de ce système sont utilisées dans les élections politiques. Par exemple, le Bundestag, parlement allemand, est élu en partie [4] grâce à la méthode de Sainte-Laguë, présentée en section 2.3.2. Cette approche de l'élection de comités doit être mise en relation avec l'approche proposée dans le cadre de cette thèse. De nombreuses questions se posent quant à la comparaison de ces deux approches. Il serait intéressant de comparer la qualité des solutions retournées, la complexité de calcul, les propriétés axiomatiques ou encore la manipulabilité de ces deux approches.

Ensuite, dans le cadre plus général du vote approbation sur des domaines combinatoires deux perspectives principales se dégagent. D'une part, en vote sur des domaines combinatoires, il est nécessaire de faire un compromis entre efficacité en termes de communication et expressivité de la méthode de vote utilisée. Nous avons étudié des règles fondées sur des préférences conditionnelles qui sont relativement efficaces en terme de communication mais qui sont donc peu expressives. Il existe des méthodes pour exprimer des préférences sur des domaines combinatoires qui se trouvent à un autre point du compromis efficacité-

4. L'élection du Bundestag est en fait plus complexe et la méthode de vote par liste n'est utilisée que pour une partie des sièges.

expressivité. Par exemple, une méthode plus coûteuse en communication est proposée par Uckelman et al. (2009). Il s'agit d'exprimer les préférences via des formules logiques pondérées. La méthode proposée est étudiée du point de vue de son expressivité, son efficacité et sa complexité. Il serait donc intéressant de comparer sur ces trois points les préférences conditionnelles avec cette méthode, ou d'autres méthodes proposées. Plus généralement, on pourrait mettre en place une mesure systématique de la perte de qualité des résultats en fonction de l'efficacité et de la complexité du langage utilisé pour les préférences sur des domaines combinatoires.
D'autre part, de manière similaire à celle du chapitre 3, il pourrait être intéressant de généraliser les deux règles de vote minisum et minimax conditionnelles en utilisant d'autres opérateurs d'agrégation, comme les OWA. Cela pourrait nous permettre de faire varier plus finement le poids de l'équité de la règle et l'effort algorithmique associé.

L'étude des problèmes de vainqueurs possibles et nécessaires est liée à différents domaines comme la manipulation ou la complexité de communication. Dans le domaine de la manipulation, ces problèmes sont liés à la question du contrôle d'une élection par un organisateur. Supposons qu'un organisateur ait le pouvoir de décider du nombre de candidats à approuver pour chaque votant et qu'il possède une fonction d'utilité sur les comités. On peut alors se demander quelles sont les contraintes sur le nombre de candidats à approuver qui maximisent son utilité espérée. Les problèmes de vainqueurs possibles et nécessaires sont évidement liés aux questions de complexité de communication, comme expliqué en section 2.6. Il est utile de déterminer quelle est la quantité d'information minimale à demander aux votants pour pouvoir déterminer avec certitude le vainqueur de l'élection.

Enfin, dans un travail de thèse récent, Durand (2015) a proposé un formalisme pour mesurer le degré de manipulabilité d'une règle de vote. Tout au long de cette thèse, nous avons rencontré des règles de vote que l'on a montrées manipulables. Il serait donc intéressant dans un premier temps de mesurer le degré de manipulabilité de ces règles, pour ensuite les comparer. En particulier, on étudiera l'évolution de la manipulabilité pour les règles fondées sur les OWA, lorsque l'on passe d'une règle proche de minisum (non manipulable) à une règle proche de minimax (manipulable).

Annexe

Preuves et exemples du chapitre 3

Exemple généralisé de la section 3.4.3.b

Exemple 6.1. *Nous considérons un nombre impair* $n = 2q + 1$ *de votant, et un entier* $\alpha \in N$, $0 \leq \alpha < q$. *Le profile* P *est composé de* $(q - \alpha)$ *votes* 00, α *votes* 10 *et* $q + 1$ *votes* 01. *Le mécanisme de départage privilégie* 01 *sur* 00 *et* 10, *et* 00 *sur* 11. *Soit* w *tel que* $W_{0\to\alpha} \leq W_{q\to q+\alpha+1}$ *et* $W_{0\to\alpha+1} > W_{q\to q+\alpha+2}$. *Nous avons*

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (1^{q+\alpha+1}0^{q-\alpha}) & D(00) = W_{0\to q+\alpha+1} \\ H^{\downarrow}(01) = (2^{\alpha}1^{q-\alpha}0^{q+1}) & D(01) = 2W_{0\to\alpha} + W_{\alpha\to q} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q+1}1^{q-\alpha}0^{\alpha}) & D(10) = 2W_{0\to q+1} + W_{q+1\to 2q-\alpha+1} \\ H^{\downarrow}(11) = (2^{q-\alpha}1^{q+\alpha+1}) & D(11) = 2W_{0\to q-\alpha} + W_{q-\alpha\to 2q+1} \end{array}$$

Clairement, pour $0 \leq \alpha < q$, *nous avons* $D(00) < D(11)$. *De plus, nous avons* $D(01) \leq D(10)$, *et le mécanisme de départage privilégie* 01 *si* $D(01) = D(10)$. *Enfin, nous avons* $D(01) - D(00) = W_{0\to\alpha} - W_{q\to q+\alpha+1}$. *Alors le vainqueur est* 01, *grâce au départage si* $W_{0\to\alpha} = W_{q\to q+\alpha+1}$.

Supposons maintenant qu'un votant 00 *transforme son vote en* 10. *Nous obtenons*

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (1^{q+\alpha+2}0^{q-\alpha-1}) & D(00) = W_{0\to q+\alpha+2} \\ H^{\downarrow}(01) = (2^{\alpha+1}1^{q-\alpha-1}0^{q+1}) & D(01) = 2W_{0\to\alpha+1} + W_{\alpha+1\to q} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q+1}1^{q-\alpha-1}0^{\alpha+1}) & D(10) = 2W_{0\to q+1} + W_{q+1\to 2q-\alpha} \\ H^{\downarrow}(11) = (2^{q-\alpha-1}1^{q+\alpha+2}) & D(11) = 2W_{0\to q-\alpha-1} + W_{q-\alpha-1\to 2q+1} \end{array}$$

Clairement, pour $0 \leq \alpha < q$, $D(01) < D(10)$ *est vérifiée. Si* $\alpha < q - 1$, $D(00) < D(11)$, *et si* $\alpha = q - 1$, *alors* $D(00) = D(11)$, *et le mécanisme privilégie* 00. *De plus nous avons* $D(01) - D(00) = W_{0\to\alpha+1} - W_{q\to q+\alpha+2}$. *Le vainqueur est donc* 00 *et la manipulation est réussie.*

Exemple généralisé de la section 3.4.3.c

Exemple 6.2. *Nous avons un nombre pair $n = 2q$ de votants, et un entier $\alpha \in N$, $0 < \alpha \leq q$. Le profil P est composé de $(q - \alpha)$ votes 00, α votes 10 et q votes 01. Le mécanisme de départage favorise 01 face à 10, et 00 face à 01 et à 10. Soit w un vecteur de poids croissant tel que $W_{0\to\alpha} < W_{q\to q+\alpha}$ et $W_{0\to\alpha-1} \geq W_{q\to q+\alpha-1}$ (en fait $W_{0\to\alpha-1} = W_{q\to q+\alpha-1}$, puisque w est croissant). Nous avons :*

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (1^{q+\alpha}0^{q-\alpha}) & D(00) = W_{0\to q+\alpha} \\ H^{\downarrow}(01) = (2^{\alpha}1^{q-\alpha}0^{q}) & D(01) = 2W_{0\to\alpha} + W_{\alpha\to q} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q}1^{q-\alpha}0^{\alpha}) & D(10) = 2W_{0\to q} + W_{q\to 2q-\alpha} \\ H^{\downarrow}(11) = (2^{q-\alpha}1^{q+\alpha}) & D(11) = 2W_{0\to q-\alpha} + W_{q-\alpha\to 2q} \end{array}$$

Clairement, pour $0 < \alpha \leq q$, nous avons $D(01) \leq D(10)$ et le mécanisme de départage tranche en faveur de 01 si $D(01) = D(10)$. Nous avons, pour $0 < \alpha < q$, $D(00) < D(11)$, et si $\alpha = q$, alors $D(00) = D(11)$. Enfin, nous avons $D(01) - D(00) = W_{0\to\alpha} - W_{q\to q+\alpha}$, et $W_{0\to\alpha} < W_{q\to q+\alpha}$. Alors le vainqueur est 01.

Maintenant, supposons qu'un votant 10 change son vote en 00. Nous obtenons

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (1^{q+\alpha-1}0^{q-\alpha+1}) & D(00) = W_{0\to q+\alpha-1} \\ H^{\downarrow}(01) = (2^{\alpha-1}1^{q-\alpha+1}0^{q}) & D(01) = 2W_{0\to\alpha-1} + W_{\alpha-1\to q} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q}1^{q-\alpha+1}0^{\alpha-1}) & D(10) = 2W_{0\to q} + W_{q\to 2q-\alpha+1} \\ H^{\downarrow}(11) = (2^{q-\alpha+1}1^{q+\alpha-1}) & D(11) = 2W_{0\to q-\alpha+1} + W_{q-\alpha+1\to 2q} \end{array}$$

Clairement, pour $0 < \alpha \leq q$, nous avons $D(00) < D(11)$ et $D(01) \leq D(10)$. Nous avons aussi $D(01) - D(00) = W_{0\to\alpha-1} - W_{q\to q+\alpha-1} = 0$. Alors, le vainqueur est 00 grâce au départage avec 01, et avec 10 si nécessaire, et la manipulation est une réussite.

Exemple généralisé de la section 3.4.3.d

Exemple 6.3. *Nous considérons un nombre impair $n = 2q + 1$ de votants, et un entier $\alpha \in N$, $0 \leq \alpha < q$. Le profil P est composé de $(q - \alpha)$ votes 01, $(\alpha + 1)$ votes 11 et q votes 10. Le mécanisme de départage privilégie 10 face à 01 et à 11. Soit w un vecteur de poids croissant tel que $W_{0\to q-\alpha} \leq W_{q+1\to 2q-\alpha}$ et $W_{0\to q-\alpha-1} > W_{q+1\to 2q-\alpha-1}$. Nous avons*

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (2^{\alpha+1}1^{2q-\alpha}) & D(00) = 2W_{0\to\alpha+1} + W_{\alpha+1\to 2q+1} \\ H^{\downarrow}(01) = (2^{q}1^{\alpha+1}0^{q-\alpha}) & D(01) = 2W_{0\to q} + W_{q\to q+\alpha+1} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q-\alpha}1^{\alpha+1}0^{q}) & D(10) = 2W_{0\to q-\alpha} + W_{q-\alpha\to q+1} \\ H^{\downarrow}(11) = (1^{2q-\alpha}0^{\alpha+1}) & D(11) = W_{0\to 2q-\alpha} \end{array}$$

Clairement, pour $0 \leq \alpha < q$, nous avons $D(11) < D(00)$ et $D(10) \leq D(01)$. Nous avons aussi $D(10) - D(11) = W_{0\to q-\alpha} - W_{q+1\to 2q-\alpha}$. Le vainqueur est donc 10, par départage avec 01 si $D(10) = D(01)$, et avec 11 si $W_{0\to q-\alpha} = W_{q+1\to 2q-\alpha}$.

Maintenant, supposons qu'un votant 01 *vote* 11*, nous avons alors*

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (2^{\alpha+2}1^{2q-\alpha-1}) & D(00) = 2W_{0\to\alpha+2} + W_{\alpha+2\to 2q+1} \\ H^{\downarrow}(01) = (2^{q}1^{\alpha+2}0^{q-\alpha-1}) & D(01) = 2W_{0\to q} + W_{q\to q+\alpha+2} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q-\alpha-1}1^{\alpha+2}0^{q}) & D(10) = 2W_{0\to q-\alpha-1} + W_{q-\alpha-1\to q+1} \\ H^{\downarrow}(11) = (1^{2q-\alpha-1}0^{\alpha+2}) & D(11) = W_{0\to 2q-\alpha-1} \end{array}$$

Clairement, pour $0 \leq \alpha < q$*, nous avons encore* $D(11) < D(00)$ *et* $D(10) \leq D(01)$*. Nous avons* $D(10) - D(11) = W_{0\to q-\alpha-1} - W_{q+1\to 2q-\alpha-1}$*. Ainsi le vainqueur est* 11 *et la manipulation est réussie, car le votant* 01 *préfère* 11 *à* 10*.*

Preuve de la propriété 3.32

Preuve. Considérons $n = 2q+1$, w croissant et un profil P tel que $AV_w(P) \neq$ minisum(P). Nous notons $c = minisum(P)$ et $c' = w$-AV(P), deux comités vainqueurs respectivement pour minisum et pour AV_w. Puisque le nombre de votants est impair, minisum possède un unique vainqueur, ainsi nous avons $minisum(c', P) - minisum(c, P) = \alpha$, pour un certain $\alpha \geq 1$. Maintenant, étudions la différence entre les scores AV_w de c et de c' :

$$D(c) - D(c') = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (H^{\downarrow}(c)_i - H^{\downarrow}(c')_i)$$

Avec le même argumentaire que celui utilisé dans le preuve de la proposition 3.21, nous avons que pour tout $1 \leq i \leq n$, $-\alpha \leq (H^{\downarrow}(c)_i - H^{\downarrow}(c')_i) \leq \alpha$, et de plus, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} (H^{\downarrow}(c)_i - H^{\downarrow}(c')_i) = -\alpha$$

Ainsi nous obtenons, à partir d'une proposition similaire à la proposition 3.20 :

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (H^{\downarrow}(c)_i - H^{\downarrow}(c')_i) \leq \sum_{i=q+2}^{n} \alpha \cdot w_i - \sum_{i=1}^{q+1} \alpha \cdot w_i$$

Mais puisque $c' = w$-AV(P), nous savons que $D(c) - D(c') \geq 0$. Ainsi, nous obtenons :

$$0 \leq \sum_{i=q+2}^{n} \alpha \cdot w_i - \sum_{i=1}^{q+1} \alpha \cdot w_i$$

Ceci implique

$$W_{0\to q+1} \leq W_{q+1\to 2q+1}$$

□

Preuve de la propriété 3.34

Preuve. Considérons $n = 2q + 1$, $m = 2$, un vecteur w croissant et un profil P tel que $AV_w(P) \neq minisum(P)$. Nous notons $c = minisum(P)$ et $c' = w\text{-AV}(P)$. Puisque le nombre de votants est impair, minisum possède un unique vainqueur, ainsi nous avons $minisum(c', P) - minisum(c, P) = \alpha$, pour un certain $\alpha \geq 1$. Maintenant, étudions la différence entre les scores AV_w de c et de c'. Avec le même argument que dans la preuve précédente nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (H^{\downarrow}(c)_i - H^{\downarrow}(c')_i) \leq \sum_{i=q+2}^{n} \alpha \cdot w_i - \sum_{i=1}^{q+1} \alpha \cdot w_i$$

Dans le cas où $m = 2$, cette borne supérieure ne peut pas être atteinte. Démontrons-le en supposant que cette borne est atteinte. Cela implique que $H^{\downarrow}(c, P)_i \in [\alpha; 2 - \alpha]$, pour $1 \leq i \leq 2q + 1$. En effet, supposons qu'il existe i tel que $H^{\downarrow}(c, P)_i > 2 - \alpha$, cela implique $H^{\downarrow}(c, P)_1 > 2 - \alpha$ et ainsi $H^{\downarrow}(c, P)_1 - H^{\downarrow}(c', P)_1 > -\alpha$ et la borne ne peut pas être atteinte. Maintenant, supposons qu'il existe i tel que $H^{\downarrow}(c, P)_i < \alpha$, cela implique que $H^{\downarrow}(c, P)_{2q+1} < \alpha$ et ainsi $H^{\downarrow}(c, P)_{2q+1} - H^{\downarrow}(c', P)_{2q+1} < \alpha$, et la borne ne peut pas être atteinte.
Donc, nous avons $H^{\downarrow}(c, P)_i \in [\alpha; 2-\alpha]$, pour $1 \leq i \leq 2q+1$, ce qui est seulement possible avec $\alpha = 1$ (car $\alpha > 0$). Cela implique que $H^{\downarrow}(c, P)_i = 1$, pour $1 \leq i \leq 2q+1$ et ainsi nous obtenons $H^{\downarrow}(c', P)_i = 2$, pour $1 \leq i \leq q + 1$ et $H^{\downarrow}(c', P)_i = 0$, pour $q + 2 \leq i \leq 2q + 1$. Mais si nous étudions le comité $\bar{c}'$, nous obtenons $H^{\downarrow}(\bar{c}', P)_i = 2$, pour $1 \leq i \leq q$ et $H^{\downarrow}(\bar{c}', P)_i = 0$, pour $q + 1 \leq i \leq 2q + 1$ et $\bar{c}'$ possède un meilleur score minisum que c ($2q$ pour $\bar{c}'$ comparé à $2q+1$ pour c). Cela contredit la définition de c. Ainsi la borne supérieure ne peut pas être atteinte.

Étudions alors la borne supérieure directement plus petite :

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (H^{\downarrow}(c)_i - H^{\downarrow}(c')_i) \leq \sum_{i=q+3}^{n} \alpha \cdot w_i - \sum_{i=1}^{q} \alpha \cdot w_i$$

Avec le même argumentaire, nous pouvons montrer que cette borne ne peut pas non pus être atteinte.

Enfin, nous étudions la borne plus petite suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (H^{\downarrow}(c)_i - H^{\downarrow}(c')_i) \leq \sum_{i=q+2}^{2q} \alpha \cdot w_i - \sum_{i=1}^{q} \alpha \cdot w_i$$

Mais puisque $c' = w\text{-AV}(P)$, nous savons que $D(c) - D(c') \geq 0$. Ainsi, nous obtenons :

$$0 \leq \sum_{i=q+2}^{2q} \alpha \cdot w_i - \sum_{i=1}^{q} \alpha \cdot w_i$$

Ceci implique :

$$W_{0\to q} \leq W_{q+1\to 2q}$$

$\square$

Deuxième exemple général pour la section 3.4.3.d

Exemple 6.4. *Nous considérons un nombre impair $n = 2q + 1$ de votants, et un entier $\alpha \in N$, $0 \leq \alpha < q$. Le profil P est composé de q votes 01, α votes 11 et $(q + 1 - \alpha)$ votes 10. Le mécanisme de départage favorise 01 face à 10, et 11 face à 01 et à 10. Soit w un vecteur de poids croissant tel que $w_{2q-\alpha} = 0$ and $w_{2q+1-\alpha} > 0$. Nous avons*

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (2^{\alpha}1^{2q+1-\alpha}) & D(00) = 2W_{0\to\alpha} + W_{\alpha\to 2q+1} \\ H^{\downarrow}(01) = (2^{q+1-\alpha}1^{\alpha}0^{q}) & D(01) = 2W_{0\to q+1-\alpha} + W_{q+1-\alpha\to q+1} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q}1^{\alpha}0^{q+1-\alpha}) & D(10) = 2W_{0\to q} + W_{q\to q+\alpha} \\ H^{\downarrow}(11) = (1^{2q+1-\alpha}0^{\alpha}) & D(11) = W_{0\to 2q+1-\alpha} \end{array}$$

Tout d'abord, pour $0 \leq \alpha < q$, nous avons $0 < D(11) \leq D(00)$, car $w_{2q+1-\alpha} > 0$. Nous avons aussi $D(01) \leq D(10)$ et $D(01) = 0$, car $w_{q+1} = 0$. Le vainqueur est donc 01, grâce au départage avec 10 si $D(10) = D(01)$.

Supposons alors qu'un votant 10 vote 11. Maintenant nous avons

$$\begin{array}{ll} H^{\downarrow}(00) = (2^{\alpha+1}1^{2q-\alpha}) & D(00) = 2W_{0\to\alpha+1} + W_{\alpha+1\to 2q+1} \\ H^{\downarrow}(01) = (2^{q-\alpha}1^{\alpha+1}0^{q}) & D(01) = 2W_{0\to q-\alpha} + W_{q-\alpha\to q+1} \\ H^{\downarrow}(10) = (2^{q}1^{\alpha+1}0^{q-\alpha}) & D(10) = 2W_{0\to q} + W_{q\to q+\alpha+1} \\ H^{\downarrow}(11) = (1^{2q-\alpha}0^{\alpha+1}) & D(11) = W_{0\to 2q-\alpha} \end{array}$$

Maintenant, pour $0 \leq \alpha < q$, nous avons $D(11) < D(00)$ and $D(11) = 0$. Et nous avons encore que $D(01) \leq D(10)$ et $D(01) = 0$. Ainsi, le vainqueur est 11 grâce au départage avec 01 et avec 10 si nécessaire. La manipulation est réussie puisque le votant 10 préfère 11 à 01.

Bibliographie

N. Ailon, M. Charikar et A. Newman. 2008, «Aggregating inconsistent information : ranking and clustering», *Journal of the ACM (JACM)*, vol. 55, nº 5, p. 23.

S. Airiau, U. Endriss, U. Grandi, D. Porello et J. Uckelman. 2011, «Aggregating dependency graphs into voting agendas in multi-issue elections.», dans *IJCAI*, p. 18–23.

J. C. R. Alcantud et A. Laruelle. 2014, «Dis&approval voting : a characterization», *Social Choice and Welfare*, vol. 43, p. 1–10.

G. Amanatidis, N. Barrot, J. Lang, E. Markakis et B. Ries. 2015, «Multiple referenda and multiwinner elections using hamming distances : Complexity and manipulability», dans *Proceedings of the 2015 International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, p. 715–723.

K. J. Arrow. 1951, «1963. social choice and individual values», *Wiley, New York.*

H. Aziz, S. Gaspers, J. Gudmundsson, S. Mackenzie, N. Mattei et T. Walsh. 2015, «Computational aspects of multi-winner approval voting», dans *Proceedings of the 2015 International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, p. 107–115.

H. Aziz et R. Savani. 2016, «Hedonic games», *Handbook of Computational Social Choice.*

Y. Bachrach, N. Betzler et P. Faliszewski. 2010, «Probabilistic possible-winner determination», dans *Proc. of AAAI-10.*

M. Balinski et R. Laraki. 2011, «Majority judgment», *Cambridge/Mass.*

S. Barberà. 2010, *Strategy-proof social choice*, vol. 2, Elsevier, 731-832 p..

S. Barbera, H. Sonnenschein et L. Zhou. 1991, «Voting by committees», *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, p. 595–609.

J. Bartholdi III, C. A. Tovey et M. A. Trick. 1989a, «Voting schemes for which it can be difficult to tell who won the election», *Social Choice and welfare*, vol. 6, nº 2, p. 157–165.

J. J. Bartholdi III, C. A. Tovey et M. A. Trick. 1989b, «The computational difficulty of manipulating an election», *Social Choice and Welfare*, vol. 6, nº 3, p. 227–241.

D. Baumeister, G. Erdèlyi, E. Hemaspaandra, L. Hemaspaandra et J. Rothe. 2010, «The basic approval voting game», dans *Handbook of Approval Voting*, édité par J.-F. Laslier et R. Sanver, Springer, p. 199–251.

D. Baumeister et J. Rothe. 2010, «Taking the final step to a full dichotomy of the possible winner problem in pure scoring rules», dans *Proceedings of ECAI-10*.

P. Berman, M. Karpinski et A. D. Scott. 2003, «Approximation hardness of short symmetric instances of MAX-3SAT», cahier de recherche TR03-049, Electronic Colloquium on Computational Complexity.

N. Betzler et B. Dorn. 2009, «Towards a dichotomy of finding possible winners in elections based on scoring rules», dans *Proceedings of MFCS-09*, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5734, Springer, p. 124–136.

N. Betzler, S. Hemmann et R. Niedermeier. 2009, «A multivariate complexity analysis of determining possible winners given incomplete votes», dans *Proceedings of IJCAI-09*, p. 53–58.

N. Betzler, A. Slinko et J. Uhlmann. 2013, «On the computation of fully proportional representation», *Journal of Artificial Intelligence Research*, p. 475–519.

C. Boutilier, R. I. Brafman, C. Domshlak, H. H. Hoos et D. Poole. 2004, «Cp-nets : A tool for representing and reasoning with conditional ceteris paribus preference statements», *J. Artif. Intell. Res.(JAIR)*, vol. 21, p. 135–191.

C. Boutilier et J. Rosenschein. 2016, «Incomplete information and communication in voting», *Handbook of Computational Social Choice*.

S. Brams et P. Fishburn. 1978, «Approval voting», *American Political Review*, vol. 72, nº 3, p. 831–847.

S. Brams, D. Kilgour et M. Sanver. 2007a, «A minimax procedure for electing committees», *Public Choice*, vol. 132(3-4), p. 401–420.

S. J. Brams et P. C. Fishburn. 1983, *Approval Voting*, Birkhäuser.

S. J. Brams et D. R. Herschbach. 2001, «The science of elections», *Science*, vol. 292, nº 5521, p. 1449–1449.

S. J. Brams et D. M. Kilgour. 2014, «Satisfaction approval voting», dans *Voting Power and Procedures*, Springer, p. 323–346.

S. J. Brams, D. M. Kilgour et M. R. Sanver. 2007b, «A minimax procedure for negotiating multilateral treaties», dans *Diplomacy games*, Springer, p. 265–282.

S. J. Brams et M. R. Sanver. 2006, «Critical strategies under approval voting : Who gets ruled in and ruled out», *Electoral Studies*, vol. 25, nº 2, p. 287–305.

F. Brandt. 2010, «Group-strategyproof irresolute social choice functions», *arXiv preprint arXiv :1005.4877*.

F. Brandt et M. Brill. 2011, «Necessary and sufficient conditions for the strategyproofness of irresolute social choice functions», dans *Proceedings of the 13th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge*, ACM, p. 136–142.

F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang et A. Procaccia. 2015, «Handbook of computational social choice», .

I. Caragiannis, D. Kalaitzis et E. Markakis. 2010, «Approximation algorithms and mechanism design for minimax approval voting», *AAAI*.

G. Chalkiadakis et M. Wooldridge. 2016, «Weighted voting games», *Handbook of Computational Social Choice*.

J. R. Chamberlin et P. N. Courant. 1983, «Representative deliberations and representative decisions : Proportional representation and the borda rule», *American Political Science Review*, vol. 77, nº 03, p. 718–733.

Y. Chevaleyre, P. E. Dunne, U. Endriss, J. Lang, M. Lemaitre, N. Maudet, J. Padget, S. Phelps, J. A. Rodriguez-Aguilar et P. Sousa. 2006, «Issues in multiagent resource allocation», *Informatica*, vol. 30, nº 1.

Y. Chevaleyre, U. Endriss, J. Lang et N. Maudet. 2007, *A short introduction to computational social choice*, vol. 4362, Springer-Verlag, 51-69 p..

Y. Chevaleyre, J. Lang, N. Maudet et J. Monnot. 2010, «Possible winners when new candidates are added : The case of scoring rules», dans *24th*, AAAI Press, p. 762–767.

Y. Chevaleyre, J. Lang, N. Maudet, J. Monnot et L. Xia. 2012, «New candidates welcome ! possible winners with respect to the addition of new candidates», *Mathematical Social Sciences*, vol. 64, nº 1, p. 74–88.

V. Conitzer, A. Davenport et J. Kalagnanam. 2006, «Improved bounds for computing kemeny rankings», dans *AAAI*, vol. 6, p. 620–626.

V. Conitzer et T. Sandholm. 2002, «Vote elicitation : Complexity and strategy-proofness», dans *AAAI/IAAI*, p. 392–397.

V. Conitzer et T. Walsh. «Barriers to manipulation in voting», *Handbook of Computational Social Choice*.

A. Davenport et J. Kalagnanam. 2004, «A computational study of the kemeny rule for preference aggregation», dans *AAAI*, vol. 4, p. 697–702.

F. Durand. 2015, *Toward Less Manipulable Voting Systems*, Theses, Paris VII. URL `https://hal.inria.fr/tel-01242440`.

E. Elkind, P. Faliszewski, P. Skowron et A. Slinko. 2014, «Properties of multiwinner voting rules», dans *Proceedings of the 2014 international conference on Autonomous agents and multi-agent systems*, International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, p. 53–60.

E. Elkind et A. Ismaili. 2015, «Owa-based extensions of the chamberlin–courant rule», dans *Algorithmic Decision Theory*, Springer, p. 486–502.

U. Endriss. 2013a, «Sincerity and manipulation under approval voting», *Theory and Decision*, vol. 74, nº 3, p. 335–355.

U. Endriss. 2013b, «Sincerity and manipulation under approval voting», *Theory and Decision*, vol. 74, nº 3, p. 335–355.

U. Endriss. 2016, «Judgment aggregation», *Handbook of Computational Social Choice*.

U. Endriss, M. S. Pini, F. Rossi et K. B. Venable. 2009, «Preference aggregation over restricted ballot languages : Sincerity and strategy-proofness», dans *IJCAI*, p. 122–127.

G. Erdélyi, M. Nowak et J. Rothe. 2008, «Sincere-strategy preference-based approval voting broadly resists control», dans *Proceedings of MFCS-08*, p. 311–322.

B. Escoffier et V. Paschos. 2007, «Differential approximation of MinSat, Max Sat and related problems», *European Journal of Operational Research*, vol. 181, nº 2, p. 620–633.

A. Feldman. 1979, «Manipulation and the pareto rule», *Journal of Economic Theory*, vol. 21, nº 3, p. 473–482.

P. C. Fishburn. 1972, «Even-chance lotteries in social choice theory», *Theory and Decision*, vol. 3, nº 1, p. 18–40.

P. C. Fishburn et A. Pekec. 2004, «Approval voting for committees : Threshold approaches», *Retrieved April*, vol. 14, p. 2009.

M. Frances et A. Litman. 1997, «On covering problems of codes.», *Theory of Computing Systems*, vol. 30(2), p. 113–119.

P. Gärdenfors. 1976, «Manipulation of social choice functions», *Journal of Economic Theory*, vol. 13, nº 2, p. 217–228.

M. R. Garey et D. S. Johnson. 1979, «Computers and intractability : a guide to the theory of np-completeness. 1979», *San Francisco, LA : Freeman.*

A. Gibbard. 1973, «Manipulation of voting schemes», *Econometrica, July*, vol. 41, nº 4, p. 587–601.

J. Goldsmith, J. Lang, N. Mattei et P. Perny. 2014, «Voting with rank dependent scoring rules», dans *Proceedings of the 28th AAAI Conference*, p. 698–704.

J. Gramm, R. Niedermeier, P. Rossmanith et al.. 2003, «Fixed-parameter algorithms for closest string and related problems», *Algorithmica*, vol. 37, nº 1, p. 25–42.

D. Grossi et G. Pigozzi. 2012, «Introduction to judgment aggregation», dans *Lectures on Logic and Computation*, Springer, p. 160–209.

E. Hemaspaandra, L. A. Hemaspaandra et J. Rothe. 1997, «Exact analysis of dodgson elections : Lewis carroll's 1876 voting system is complete for parallel access to np», *Journal of the ACM (JACM)*, vol. 44, nº 6, p. 806–825.

O. Hudry. 1989, *Recherche d'ordres médians : complexité, algorithmique et problèmes combinatoires*, thèse de doctorat.

M. Kalech, S. Kraus, G. A. Kaminka et C. V. Goldman. 2011, «Practical voting rules with partial information», *10th*, vol. 22, nº 1, p. 151–182.

Keeney et H. Raiffa. 1976, *Decisions with multiple objectives*, John Wiley.

J. S. Kelly. 1977, «Strategy-proofness and social choice functions without singlevaluedness», *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, p. 439–446.

J. G. Kemeny. 1959, «Mathematics without numbers», *Daedalus*, vol. 88, nº 4, p. 577–591.

D. M. Kilgour, S. J. Brams et M. R. Sanver. 2006, «How to elect a representative committee using approval balloting», dans *Mathematics and Democracy*, Springer, p. 83–95.

M. Kilgour. 2010, «Approval balloting for multi-winner elections», dans *Handbook of Approval Voting*, édité par J.-F. Laslier et R. Sanver, Springer, p. 105–124.

B. Klaus, D. F. Manlove et F. Rossi. 2014, «Matching under preferences», cahier de recherche, Université de Lausanne, Faculté des HEC, DEEP.

K. Konczak et J. Lang. 2005, «Voting procedures with incomplete preferences», dans *Proc. IJCAI-05 Multidisciplinary Workshop on Advances in Preference Handling*, vol. 20.

S. Konieczny, J. Lang et P. Marquis. 2004, «Da 2 merging operators», *Artificial Intelligence*, vol. 157, nº 1, p. 49–79.

S. Konieczny et R. Pino-Pérez. 2011, «Logic based merging», *Journal of Philosophical Logic*, vol. 40(2), p. 239–270.

J. Lang, M. S. Pini, F. Rossi, D. Salvagnin, K. B. Venable et T. Walsh. 2011, «Winner determination in voting trees with incomplete preferences and weighted votes», *Journal of Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*. To appear.

J. Lang et L. Xia. 2016, «Voting in combinatorial domains», .

A. Laruelle et F. Valenciano. 2012, «Quaternary dichotomous voting rules», *Social choice and welfare*, vol. 38, nº 3, p. 431–454.

J.-F. Laslier. 2009, «The leader rule – a model of strategic approval voting in a large electorate», *Journal of Theoretical Politics*, vol. 21, p. 113–136.

J.-F. Laslier et M. R. Sanver. 2010, *Handbook on approval voting*, Springer Science & Business Media.

J.-F. Laslier et R. Sanver. «The basic approval voting game», dans *Handbook of Approval Voting*, édité par J.-F. Laslier et R. Sanver, Springer.

R. LeGrand, E. Markakis et A. Mehta. 2007, «Some results on approximating the minimax solution in approval voting», *AAMAS*, p. 198.

M. Li, B. Ma et L. Wang. 1999, «Finding similar regions in many strings», dans *Proceedings of ACM-99*.

I. McLean et A. B. Urken. 1995, *Classics of social choice*, University of Michigan Press.

R. Meir, A. Procaccia, J. Rosenschein et A. Zohar. 2008a, «Complexity of strategic behavior in multi-winner elections», *J. Artif. Intell. Res.(JAIR)*, , nº 33, p. 149–178.

R. Meir, A. D. Procaccia, J. S. Rosenschein et A. Zohar. 2008b, «Complexity of strategic behavior in multi-winner elections.», *J. Artif. Intell. Res.(JAIR)*, vol. 33, p. 149–178.

B. L. Monroe. 1995, «Fully proportional representation», *American Political Science Review*, vol. 89, nº 04, p. 925–940.

H. Moulin. 2002, «Axiomatic cost and surplus sharing», *Handbook of social choice and welfare*, vol. 1, p. 289–357.

J. F. Nash Jr. 1950, «The bargaining problem», *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, p. 155–162.

M. Nuñez. 2010, «Condorcet consistency of approval voting : a counter example in large poisson games», *Journal of Theoretical Politics*, vol. 22, p. 64–84.

M. J. Osborne et A. Rubinstein. 1994, *A course in game theory*, MIT press.

V. Paschos. 2004, «Complexité et approximation polynomiale», .

A. Procaccia, R. Meir et A. Zohar. 2008a, «On the complexity of achieving proportional representation», *Social Choice and Welfare*, , nº 30(3), p. 353–362.

A. D. Procaccia, M. Feldman et J. S. Rosenschein. 2007, *Approximability and inapproximability of Dodgson and Young elections*, Citeseer.

A. D. Procaccia, J. S. Rosenschein et A. Zohar. 2008b, «On the complexity of achieving proportional representation», *Social Choice and Welfare*, vol. 30, nº 3, p. 353–362.

J. Rothe, H. Spakowski et J. Vogel. 2003, «Exact complexity of the winner problem for young elections», *Theory of Computing Systems*, vol. 36, n° 4, p. 375–386.

T. Sandholm, K. Larson, M. Andersson, O. Shehory et F. Tohmé. 1999, «Coalition structure generation with worst case guarantees», *Artificial Intelligence*, vol. 111, n° 1, p. 209–238.

M. R. Sanver et W. S. Zwicker. 2012, «Monotonicity properties and their adaptation to irresolute social choice rules», *Social Choice and Welfare*, vol. 39, n° 2-3, p. 371–398.

M. A. Satterthwaite. 1975, «Strategy-proofness and arrow's conditions : Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions», *Journal of economic theory*, vol. 10, n° 2, p. 187–217.

M. Sertel et B. Yılmaz. 1999, «The majoritarian compromise is majoritarian-optimal and subgame-perfect implementable», *Social Choice and Welfare*, vol. 16, n° 4, p. 615–627.

L. S. Shapley. 1952, «A value for n-person games», cahier de recherche, DTIC Document.

F. Simmons. 2001, «Proportional approval voting», *Retrieved May*, vol. 21, p. 2009.

F. D. Sinopoli, B. Dutta et J.-F. Laslier. 2006, «Approval voting : three examples.», *International Journal of Game Theory*, vol. 35, n° 1, p. 27–38.

P. Skowron, P. Faliszewski et J. Lang. 2015, «Finding a collective set of items : From proportional multirepresentation to group recommendation», dans *Proceedings of AAAI-15*.

A. Slinko et S. White. 2010, «Proportional representation and strategic voters», *Journal of Theoretical Politics*, vol. 22, n° 3, p. 301–332.

A. D. Taylor. 2005, *Social choice and the mathematics of manipulation*, Cambridge University Press.

J. Uckelman, Y. Chevaleyre, U. Endriss et J. Lang. 2009, «Representing utility functions via weighted goals», *Mathematical Logic Quarterly*, vol. 55, n° 4, p. 341–361.

L. Xia et V. Conitzer. 2008, «Determining possible and necessary winners under common voting rules given partial orders», dans *Proceedings of AAAI-08*, p. 196–201.

L. Xia, J. Lang et J. Monnot. 2011, «Possible winners when new alternatives join : New results coming up !», dans *10th*, p. 829–836.

R. Yager. «On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision-making», *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*.

R. Yager. 1993, «Families of OWA operators», *Fuzzy sets and systems*, , n° 59(2), p. 125–148.

R. Yager et J. Kacprzyk. 1997, *The ordered weighted averaging operators : theory and applications*, Kluwer Academic Publishers.

H. P. Young. 1977, «Extending condorcet's rule», *Journal of Economic Theory*, vol. 16, n° 2, p. 335–353.

H. P. Young et A. Levenglick. 1978, «A consistent extension of condorcet's election principle», *SIAM Journal on applied Mathematics*, vol. 35, n° 2, p. 285–300.

Résumé : L'objet de cette thèse est l'étude des aspects algorithmiques du vote par approbation. Il s'agit principalement d'une étude théorique des enjeux computationnels soulevés par le vote par approbation dans des contextes de décisions variés. En effet, j'utilise des techniques de complexité comme la réduction polynomiale pour montrer que le vote par approbation peut conduire à des problèmes difficiles à résoudre. Cependant, j'étudie aussi des questions plus proche de la théorie classique du choix social, puisque j'aborde la question de la manipulation et des propriétés axiomatiques du vote par approbation. De plus, certaines questions font l'objet d'une étude expérimentale dans le but de mieux comprendre le comportement des règles basées sur le vote par approbation.

Dans un premier temps, l'étude se porte sur les élections de comités et les référendums multiples à l'aide du vote par approbation. Je propose une famille générale de règles de vote, pour laquelle je démontre que le calcul du vainqueur est difficile. Puis j'étudie en détail la manipulation de ces règles, en explicitant des exemples de manipulation valides pour tout nombre de votants et de candidats. Enfin, la question du nombre de comités vainqueurs ex aequo est abordée au travers d'une étude expérimentale.

Dans un second temps, je porte mon attention sur un contexte plus général, le vote par approbation sur domaines combinatoires. De nouvelles méthodes de vote sont proposées, se basant sur des préférences conditionnelles. J'étudie alors les propriétés axiomatiques de ces règles, puis je montre leur manipulation.

Finalement, je me place dans le cadre du vote avec préférences incomplètes pour étudier les problèmes de vainqueurs possibles et nécessaires dans le vote par approbation. En premier, j'explore ces problèmes pour le vote par approbation à vainqueur unique, en obtenant des résultats de complexité positifs et négatifs. Puis une étude expérimentale apporte des éclaircissements sur la robustesse du vote par approbation en fonction du nombre de candidats approuvés par chaque votant. Enfin, dans le cadre du vote par approbation à vainqueurs multiples, je démontre que le problème du vainqueur possible est difficile pour la plupart des règles proposées dans la littérature.
Mots-clés : Choix social computationnel, Vote par approbation, Élection de comités, Domaines combinatoires, Préférences incomplètes, Complexité algorithmique, Manipulation.

Abstract: The subject of this thesis is the study of computational aspects of approval voting. Most of the works are theoretical results about computational issues raised by approval voting, in many different settings. Indeed, I use algorithmic techniques like polynomial reductions to prove that many problems are difficult to solve in the context of approval voting. However, I also study some questions that are more related to classical choice theory, such as manipulability and axiomatic properties of approval voting. Moreover, some problems are investigated through experimental analysis.

Firstly, I study approval voting in the context of committee elections and multiple referenda. A general family of rules is suggested, for which I show that the winner determination problem is difficult. Next, I explore extensively the manipulability of these rules, providing general examples of manipulation that adapt to any number of voters or candidats. Finally, experimental analysis allow us to get some insights about the number of co-winning committees.

Secondly, I focus on a more general setting, approval voting in combinatorial domains. New methods are suggested for how to use approval voting in this context. First, I study the axiomatic properties and the manipulability of these methods.

Finally, I study approval voting in the context of incomplete preferences. In the case of single winner approval voting, I study the possible and necessary winners problems, and show that they lead to some questions that are easy to solve and some that are difficult. Then an experimental study is conducted to evaluate the sensitivity of approval voting to the number of candidates that are approved by the voters. To conclude, I show that the possible winner problem is difficult for all the rules in the literature in the context of multi-winner approval voting.
Key words: Computational social choice, Approval voting, Committee elections, Combinatorial domains, Incomplete preferences, Algorithmic complexity, Manipulation.